Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + NSI, veuillez visiter :
bac-maths-nsi.fr/annales-sujets-et-corriges

Baccalauréat épreuve de spécialité (terminale)

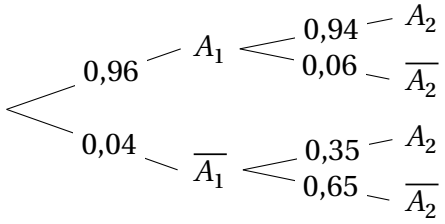
Corrigé

générale - spécialité J2 - Antilles, Guyane - 17 juin 2026

Exercice 1 (6 points)

Partie A

1. L'arbre pondéré représentant la situation est :



2. Les événements A_1 et $\overline{A_1}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_1 \cap A_2) + P(\overline{A_1} \cap A_2) \\ &= P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(\overline{A_1}) \times P_{\overline{A_1}}(A_2) \\ &= 0{,}96 \times 0{,}94 + 0{,}04 \times 0{,}35 \\ &= 0{,}916\,4 \end{aligned}$$

On a donc bien : $P(A_2) = 0{,}916\,4$.

3. $P_{A_2}(\overline{A_1}) = \dfrac{P(\overline{A_1} \cap A_2)}{P(A_2)}$.

$$\begin{aligned} &= \frac{0{,}04 \times 0{,}35}{0{,}9164} \\ &\approx 0{,}015277 \end{aligned}$$

Donc $P_{A_2}(\overline{A_1}) \approx 0{,}0153$, arrondi à 10^{-4}.

Dans le contexte de l'exercice, la probabilité que le message reçu par le premier relai soit avec erreur sachant que le message reçu par le deuxième relai était sans erreur est égale à 0,015 3.

Partie B

1. a. Pour déterminer la probabilité que 4 tests soient positifs dans cet échantillon, il faut calculer $P(X = 4)$.

X suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}04$ donc :

$$P(X = 4) = \binom{50}{4} \times 0{,}04^4 \times (1 - 0{,}04)^{50-4} \approx 0{,}090159$$

La probabilité que 4 tests soient positifs dans cet échantillon est égale à 0,09, arrondi à 10^{-2}.

b. La probabilité qu'au moins un test soit positif dans cet échantillon est égale à $P(X \geqslant 1)$.
À l'aide de la calculatrice on trouve : $P(X \geqslant 1) \approx 0{,}8701$.
La probabilité qu'au moins un test soit positif dans cet échantillon est égale à 0,87, arrondi à 10^{-2}.

c. La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}04$.
Donc :
$\mathrm{E}(X) = n \times p = 50 \times 0{,}04 = 2$
$\mathrm{V}(X) = n \times p \times (1-p) = 50 \times 0{,}04 \times (1-0{,}04) = 1{,}92$.
L'espérance de la variable aléatoire X est égale à 2 et sa variance est égale à 1,92.

2. a. $M = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{25}}{25}$ est la variable aléatoire moyenne de 25 variables aléatoires indépendantes de même loi que X on a donc :
$\mathrm{E}(M) = \mathrm{E}(X) = 2$
et $\mathrm{V}(M) = \dfrac{\mathrm{V}(X)}{25}$
$= \dfrac{1{,}92}{25}$
$= 0{,}076\,8$
On a bien : $\mathrm{E}(M) = 2$ et $\mathrm{V}(M) = 0{,}076\,8$.

b. La probabilité que la moyenne des tests positifs soit strictement inférieure à 7 est égale à $P(M < 7)$.
On a : $P(M < 7) = P(-3 < M < 7) = P(-5 < M - 2 < 5) = 1 - P\Big(\big|M-2\big| \geq 5\Big)$
Or, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :
$\forall t \in \mathbb{R}^{*+}, \quad P\Big(\big|M - E(M)\big| \geq t\Big) \leq \dfrac{V(M)}{t^2}$.
Avec $t = 5$ on a : $P\Big(\big|M-2\big| \geq 5\Big) \leq \dfrac{0{,}0768}{5^2}$
soit $P\Big(\big|M-2\big| \geq 5\Big) \leq 0{,}003072$
On a donc : $1 - P\Big(\big|M-2\big| \geq 5\Big) \geq 1 - 0{,}003072$
D'où : $P(M < 7) \geq 0{,}996928 \geq 0{,}99$
La probabilité que la moyenne des tests positifs soit strictement inférieure à 7 est donc supérieure à 0,99.

Partie C

1. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, posons P_n l'affirmation : « $p_{n+1} \leqslant p_n$. ».
Démontrons par récurrence que les affirmations P_n sont toutes vraies.

- **Initialisation :**
  $p_2 = 0{,}59p_1 + 0{,}35 = 0{,}59 \times 0{,}96 + 0{,}35 = 0{,}9164$.
  On a donc $p_2 \leqslant p_1$
  Donc que l'affirmation P_1 est vraie.
- **Hérédité :** Soit n un entier naturel non nul. On suppose que l'affirmation P_n est vraie, c'est à dire $p_{n+1} \leqslant p_n$ »., montrons que l'affirmation P_{n+1} est vraie, c'est à dire $p_{n+2} \leqslant p_{n+1}$ ».

P_n est vraie $\Longrightarrow p_{n+1} \leqslant p_n$
$\Longrightarrow 0{,}59 \times p_{n+1} \leqslant 0{,}59 \times p_n \quad$ car $0{,}59 > 0$
$\Longrightarrow 0{,}59 \times p_{n+1} + 0{,}35 \leqslant 0{,}59 \times p_n + 0{,}35$
$\Longrightarrow p_{n+2} \leqslant p_{n+1}$
$\Longrightarrow P_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion :** On a montré que l'affirmation P_1 est vraie, et que pour un n entier naturel non nul, si P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie.
  En vertu du principe de récurrence, on en déduit que, pour tout entier naturel non nul n, l'affirmation est vraie, et donc pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $p_{n+1} \leqslant p_n$.

2. D'après la question précédente, pour tout entier naturel $n \leqslant 1$, on a $p_{n+1} \leqslant p_n$ donc la suite (p_n) est décroissante.
De plus, p_n est égal une probabilité donc $p_n \geqslant 0$, la suite (p_n) est donc minorée par 0.
Donc la suite (p_n) est convergente vers une limite ℓ.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0{,}59x + 0{,}35$.
On a donc, pour tout entier naturel non nul n, $p_{n+1} = f(p_n)$.
La suite (p_n) est donc définie par une relation de récurrence avec f une fonction continue.
De plus, la suite (p_n) est convergente vers une limite ℓ.
D'après le théorème du point fixe, la limite ℓ est donc solution de l'équation $f(x) = x$.

$f(x) = x \iff 0{,}59x + 0{,}35 = x$
$\iff 0{,}35 = 0{,}41x$
$\iff x = \dfrac{0{,}35}{0{,}41}$
$\iff x = \dfrac{35}{41}$

(p_n) est donc convergente vers $\dfrac{35}{41}$.

Exercice 2 (5 points)

Partie A

1. a. Comme le repère est orthonormé :

- $\text{AC} = \sqrt{\left(\dfrac{9}{4} - 0\right)^2 + (3-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{\dfrac{81}{16} + 9} = \sqrt{\dfrac{81}{16} + \dfrac{144}{16}} = \sqrt{\dfrac{225}{16}} = \dfrac{15}{4}$;
- $\text{CB} = \sqrt{\left(\dfrac{9}{4} - \dfrac{9}{2}\right)^2 + (3-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{\left(-\dfrac{9}{4}\right)^2 + 9} = \sqrt{\dfrac{81}{16} + \dfrac{144}{16}} = \sqrt{\dfrac{225}{16}} = \dfrac{15}{4}$;

Les longueurs sont égales, donc le triangle est bien isocèle en C.

b. • Dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal est aussi une médiane (et une médiatrice).
La hauteur issue de C est donc le segment [CI], où I est le milieu de [AB].
I a donc pour coordonnées : $\text{I}\left(\dfrac{x_\text{A} + x_\text{B}}{2} ; \dfrac{y_\text{A} + y_\text{B}}{2} ; \dfrac{z_\text{A} + z_\text{B}}{2}\right)$ soit $\left(\dfrac{9}{4} ; 0 ; 0\right)$.

- L'aire d'un triangle est donnée par : $\mathscr{A} = \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$.
  Ici, on choisit comme base le segment [AB] et la hauteur correspondante, [CI].
- La distance AB est : $\text{AB} = \sqrt{\left(\dfrac{9}{2} - 0\right)^2 + (0-0)^2 + (0-0)^2} = \dfrac{9}{2}$;
  La distance CI est : $\text{CI} = \sqrt{\left(\dfrac{9}{4} - \dfrac{9}{4}\right)^2 + (3-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{9} = 3$;

On a donc : $\mathscr{A}_{\text{ABC}} = \dfrac{\text{AB} \times \text{CI}}{2} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{9}{2} \times 3 = \dfrac{27}{4} = 6{,}75$.

L'aire du triangle ABC est bien égale à $6{,}75\,\text{m}^2$.

2. a. On a : $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. et $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ces vecteurs ont des coordonnées non proportionnelles, donc ils ne sont pas colinéaires.

Les points A, B et C ne sont pas alignés, donc ils définissent un plan.

De plus $z_{\text{A}} = z_{\text{B}} = z_{\text{C}} = 0$

donc une équation cartésienne du plan (ABC) est bien : $z = 0$.

b. H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC) si et seulement si

$\begin{cases} H \in (\text{ABC}) \\ \text{la droite (HD) est orthogonale au plan (ABC)} \end{cases}$.

- $z_{\text{H}} = 0$ donc $H \in (\text{ABC})$
- $\overrightarrow{\text{HD}}\begin{pmatrix} x_{\text{D}} - x_{\text{H}} \\ y_{\text{D}} - y_{\text{H}} \\ z_{\text{D}} - z_{\text{H}} \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{\text{HD}}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \\ 1 - 1 \\ 3 - 0 \end{pmatrix}$ finalement : $\overrightarrow{\text{HD}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Or, une équation cartésienne du plan (ABC) étant $z = 0$, un vecteur normal au plan (ABC) est $\overrightarrow{m}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{m}$ et $\overrightarrow{\text{HD}}$ sont colinéaires, donc la droite (HD) est orthogonale au plan (ABC).

Donc le point $\text{H}\left(\dfrac{3}{2}\,;1\,;0\right)$ est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

3. Avec les questions précédentes, on a calculé l'aire du triangle ABC, qui est l'une des quatre bases possibles pour le tétraèdre.

Si on choisit ABC comme base de ABCD, alors la hauteur correspondante est la distance séparant le quatrième sommet (ici D), du plan contenant la base ABC, c'est-à-dire le plan (ABC).

Cette distance est donc la distance séparant D de son projeté orthogonal sur (ABC), c'est-à-dire H, dont on a déterminé les coordonnées à la question **2 b.**.

$\text{DH} = \sqrt{0^2 + 0^2 + 3^2} = 3$.

On a donc : $\mathscr{V}_{\text{ABCD}} = \dfrac{1}{3} \times \mathscr{A}_{\text{ABC}} \times \text{DH} = \dfrac{1}{3} \times 6{,}75 \times 3 = 6{,}75$.

Le volume du module est égal à $6{,}75\,\text{m}^3$.

Partie B

1. a. Déterminons les coordonnées des vecteurs :

$\overrightarrow{\text{BC}}\begin{pmatrix} x_\text{C}-x_\text{B} \\ y_\text{C}-y_\text{B} \\ z_\text{C}-z_\text{B}\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{\text{BC}}\begin{pmatrix} \frac{9}{4}-\frac{9}{2} \\ 3-0 \\ 0-0\end{pmatrix}$ finalement : $\overrightarrow{\text{BC}}\begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ 3 \\ 0\end{pmatrix}$. De même, $\overrightarrow{\text{BD}}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3\end{pmatrix}$.

Ces vecteurs ont des coordonnées non proportionnelles, donc ils ne sont pas colinéaires.

Les points B, C et D ne sont pas alignés, donc ils définissent un plan.

On est dans un repère orthonormé, donc on peut utiliser la formule analytique du produit scalaire :

- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{BC}} = 4\times\dfrac{-9}{4}+3\times 3+3\times 0 = -9+9+0 = 0$;
- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{BD}} = 4\times(-3)+3\times 1+3\times 3 = -12+3+9 = 0$;
- $\overrightarrow{\text{BC}}$ et $\overrightarrow{\text{BD}}$ sont deux vecteurs non colinéaires qui forment une base du plan (BCD).

$\vec{n}$ est orthogonal à ces deux vecteurs, donc c'est un vecteur normal du plan (BCD).

b. Si $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD), alors, par propriété, une équation du plan (BCD) peut avoir la forme : $4\times x+3\times y+3\times z+d=0$, où d est un réel.

Comme B est un point de (BCD), on doit avoir : $4x_\text{B}+3y_\text{B}+3z_\text{B}+d=0$.

$$\begin{aligned} 4x_\text{B}+3y_\text{b}+3z_\text{B}+d=0 &\iff 4\times\frac{9}{2}+3\times 0+3\times 0+d=0 \\ &\iff 18+d=0 \\ &\iff d=-18\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de (BCD) est donc bien : $4x+3y+3z-18=0$.

c. Si la droite Δ est orthogonale au plan (BCD), alors, par définition, elle doit être dirigée par un vecteur normal au plan (BCD), donc ici, on en déduit que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3\end{pmatrix}$ dirige la droite Δ.

Comme la droite Δ passe par le point $\text{D}\left(\frac{3}{2}\,;1\,;3\right)$, une représentation paramétrique de la droite Δ est donnée par : $\begin{cases} x = x_\text{D}+x_{\vec{n}}\times t \\ y = y_\text{D}+y_{\vec{n}}\times t \\ z = z_\text{D}+z_{\vec{n}}\times t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

En remplaçant par les valeurs connues, on a : $\begin{cases} x = \frac{3}{2}+4t \\ y = 1+3t \\ z = 3+3t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

2. Le point L est l'intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

Comme c'est un point de la droite Δ, il existe un réel t_0 tel que les coordonnées de ce point sont $\left(\frac{3}{2}+4t_0\,;1+3t_0\,;3+3t_0\right)$.

C'est aussi un point de (ABC) dont ses coordonnées vérifient l'équation du plan.

Autrement dit, t_0 est solution de l'équation :

$3+3t_0=0 \iff 3t_0=-3$

$\iff t_0=-1$

Le point L a donc pour coordonnées : $\left(\frac{3}{2}-4\,;1-3\,;3-3\right)$ soit $\mathrm{L}\left(-\frac{5}{2}\,;-2\,;0\right)$.

3. Afin de déterminer l'angle $\widehat{\mathrm{LDH}}$, calculons le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{DL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DH}}$ de deux manières différentes.

On a $\overrightarrow{\mathrm{DH}}\begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}$. et $\overrightarrow{\mathrm{DL}}\begin{pmatrix}-4\\-3\\-3\end{pmatrix}$.

Nous sommes dans un repère orthonormé, nous pouvons utiliser la formule analytique :

$\overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DL}}=x_{\mathrm{DH}}\times x_{\mathrm{DL}}+y_{\mathrm{DH}}\times y_{\mathrm{DL}}+z_{\mathrm{DH}}\times z_{\mathrm{DL}}$

$=0\times(-4)+0\times(-3)-3\times(-3)$.

$=9$

On a aussi : $\overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DL}}=\left\|\overrightarrow{\mathrm{DH}}\right\|\times\left\|\overrightarrow{\mathrm{DL}}\right\|\times\cos(\widehat{\mathrm{LDH}})$

Calculons la longueur DL : $\mathrm{DL}=\sqrt{(-4)^2+3^2+3^2}=\sqrt{16+9+9}=\sqrt{34}$

En remplaçant dans la formule précédente on obtient :

$9=3\times\sqrt{34}\times\cos(\widehat{\mathrm{LDH}})$

D'où : $\cos(\widehat{\mathrm{LDH}})=\dfrac{9}{3\sqrt{34}}=\dfrac{3\sqrt{34}}{34}$

donc $\widehat{\mathrm{LDH}}\approx 59{,}04\,°$.

L'angle $\widehat{\mathrm{LDH}}$ est strictement inférieur à 60 ° donc le module est bien adapté aux débutants.

Exercice 3 (4 points)

1. a. Affirmation 1 est Fausse.

L'équation différentielle (E_1) : $y'+2y=0 \iff y'=-2y$ est de la forme $y'=ay$

donc les solutions sont les fonctions de la forme $x\mapsto C\,\mathrm{e}^{ax}$ avec $C\in\mathbb{R}$.

Donc, il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)=C\,\mathrm{e}^{-2x}$.

Or $f(0)=1$ donc $1=C\,\mathrm{e}^{-2\times 0} \iff C=1$.

donc f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-2x}$.

$f(ln2)=\mathrm{e}^{-2\ln 2}=\mathrm{e}^{-ln2^2}=\mathrm{e}^{ln\left(\frac{1}{4}\right)}=\dfrac{1}{4}\neq\dfrac{1}{2}$

Donc : le point A de coordonnées $\left(\ln 2\,;\dfrac{1}{2}\right)$ n'appartient pas à la courbe représentative de la fonction f.

b. Affirmation 2 est Fausse.

Pour étudier la position relative de la courbe représentative de la fonction f et de ses tangentes, étudions la convexité de la fonction.

Pour tout réel $x\in\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$:

$f'(x)=1+\sin(x)$

et donc $f''(x) = \cos(x)$.

Or sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$, $cos(x) \leq 0$ donc la fonction est concave.

Elle est donc située en-dessous de toutes ses tangentes.

c. Affirmation 3 est Vraie.

Pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$:

$$-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \iff -\frac{1}{x} \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant \frac{1}{x} \quad \text{car } x > 0$$
$$\iff 1 - \frac{1}{x} \leqslant 1 + \frac{\sin(x)}{x} \leqslant 1 + \frac{1}{x}$$
$$\iff 1 - \frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$.

D'après le théorème des gendarmes, on a donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

C'est à dire, la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$.

2. Affirmation 4 est Vraie.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 2 - 3\,\mathrm{e}^{3x}$.

Donc, pour tout réel x :

$$f'(x) - 3f(x) = 2 - 3\,\mathrm{e}^{3x} - 3\left(2x - \mathrm{e}^{3x}\right)$$
$$= 2 - 3\,\mathrm{e}^{3x} - 6x + 3\,\mathrm{e}^{3x}$$
$$= 2 - 6x$$

Donc f est solution de l'équation (E_2).

Exercice 4 (5 points)

Partie A : étude d'un premier cas particulier

1. F_2 est une primitive de la fonction f_2 sur $]0\,;+\infty[$ donc f_2 est la dérivée de la fonction F_2.

Les variations de la fonction F_2 sont donc données par le signe de la fonction f_2.

Avec la précision permise par le graphique :

x	0		0,3		2,5		3
signe de $f_2(x)$	‖	−	0	+	0	−	
variations de F_2	‖	↘		↗		↘	

La fonction F_2 est décroissante sur l'intervalle $]0\,;0{,}3]$ et sur l'intervalle $[2{,}5\,;3]$, et elle est croissante sur l'intervalle $[0{,}3\,;2{,}5]$.

2. La courbe 1 représente la fonction f_2' et la courbe 2 représente la fonction f_2'' :

La dérivée de la fonction f_2 doit s'annuler lorsque la fonction f_2 admet un maximum. Ce maximum est atteint pour $x \approx 0{,}75$.

La seule courbe qui s'annule aux environs de 0,75 est la courbe 1 donc la courbe 1 représente la fonction f_2'.

Le point A est un point d'inflexion pour la courbe de la fonction f_2 donc la dérivée seconde s'annule en $x_A \approx 1{,}6$.

La seule courbe qui s'annule aux environs de 1,6 est la courbe 2 donc la courbe 2 représente la fonction f_2''.

Partie B : étude d'un second cas particulier

1. a. f_1 est de la forme $w + \dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} w(x) = 1 - x \\ u(x) = 1 + \ln(x) \\ v(x) = x \end{cases}$. On a : $\begin{cases} w'(x) = -1 \\ u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$.

On a : $f_1' = w' + \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

Donc, pour tout réel $x > 0$:

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= -1 + \frac{\dfrac{1}{x} \times x - 1 \times \big(1 + \ln(x)\big)}{x^2} \\ &= -1 + \frac{1 - 1 - \ln(x)}{x^2} \\ &= -1 - \frac{\ln x}{x^2} \end{aligned}$$

On a bien, pour tout réel $x > 0$, $\quad f_1'(x) = -1 - \dfrac{\ln x}{x^2}$.

b. Pour tout réel $x > 0$, $\quad f_1'(x) = -1 - \dfrac{\ln x}{x^2}$.

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1'(x) = -1$.

2. a. Pour tout réel $x > 0$, $\quad f_1''(x) = \dfrac{2\ln x - 1}{x^3}$.

$x > 0$ donc $x^3 > 0$ donc $f_1''(x)$ est du signe de $2\ln(x) - 1$.

$$\begin{aligned} 2\ln(x) - 1 > 0 &\iff 2\ln(x) > 1 \\ &\iff \ln(x) > \frac{1}{2} \\ &\iff x > \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \quad \text{car la fonction exponentielle est strictement croissante} \end{aligned}$$

De plus $f_1'\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = -1 - \dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)^2}$

$$\begin{aligned} &= -1 - \frac{\frac{1}{2}}{\mathrm{e}^1} \\ &= -1 - \frac{1}{2\mathrm{e}} \end{aligned}$$

On a donc :

x	0		$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
signe de $f_1''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
variations de f_1'	‖	↘	$-1-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$	↗	

b. Pour tout réel $x>0$, $\quad f_1'(x)=-1-\dfrac{\ln x}{x^2}$.

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} -\ln(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^2=0^+\end{cases}$ donc, par quotient et somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=+\infty$.

c. Sur l'intervalle $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right]$:

La fonction f_1' est continue (car dérivable) et strictement décroissante.

De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} f_1'(x)=+\infty>0$ et $f_1'\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)=-1-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}<0$.

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f_1'(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right]$

Sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\,;+\infty\right[$, la fonction f_1' est strictement croissante et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1'(x)=-1$

donc, pour tout réel $x>\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$, $\quad f_1'(x)<-1<0$.

Donc l'équation $f_1'(x)=0$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\,;+\infty\right[$.

Finalement, il existe une unique solution α à l'équation $\quad f_1'(x)=0 \quad$ sur $]0\,;+\infty[$.

On peut donc en déduire le signe de f_1' et les variations de f_1 sur cet intervalle :

x	0		α		$+\infty$
signe de $f_1(x)$	‖	$+$	0	$-$	
variations de f_1	‖	↗		↘	

f_1 admet donc un maximum atteint pour $x=\alpha$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

d. Le programme écrit en langage Python renvoyant une valeur approchée à 10^{-2} près de la solution α de l'équation $\quad f_1'(x)=0 \quad$ sur $]0\,;+\infty[$ est :

```
def d(x) :
    return -1-ln(x)/x**2

def alpha() :
    u = 0.5
    while d(u)  > 0 :
        u = u + 0.01
    return u
```

Partie C : k quelconque

1. H est dérivable sur $]0\,;+\infty[$

H est de la forme $\dfrac{1}{2}u^2$ avec $u(x)=1+\ln(x)$. On a $u'(x)=\dfrac{1}{x}$.

On a $H'=\dfrac{1}{2}\times 2u'u$

Donc pour tout réel $x>0$:

$$\begin{aligned}H'(x)&=\frac{1}{x}\times(1+\ln(x))\\&=\frac{1+\ln x}{x}\\&=h(x)\end{aligned}$$

Donc la fonction H est une primitive de h sur $]0\,;+\infty[$.

2. La valeur moyenne de la fonction f_k sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}\,]$ est égale à $\mu=\dfrac{1}{\mathrm{e}-1}\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f_k(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\mu&=\frac{1}{\mathrm{e}-1}\int_1^{\mathrm{e}} f_k(x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\mathrm{e}-1}\int_1^{\mathrm{e}}\left(1-x+\frac{k(1+\ln x)}{x}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\mathrm{e}-1}\int_1^{\mathrm{e}}\left(1-x+kh(x)\right)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\mathrm{e}-1}\left[x-\frac{x^2}{2}+kH(x)\right]_1^{\mathrm{e}}\\&=\frac{1}{\mathrm{e}-1}\left(\left(\mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}^2}{2}+kH(\mathrm{e})\right)-\left(1-\frac{1^2}{2}+kH(1)\right)\right)\\&=\frac{1}{\mathrm{e}-1}\left(\left(\mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}^2}{2}+k\frac{1}{2}(1+\ln\mathrm{e})^2\right)-\left(1-\frac{1^2}{2}+k\frac{1}{2}(1+\ln 1)^2\right)\right)\\&=\frac{1}{\mathrm{e}-1}\left(\mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}^2}{2}+k\frac{(1+1)^2}{2}-1+\frac{1}{2}-k\frac{(1+0)^2}{2}\right)\\&=\frac{2\mathrm{e}-\mathrm{e}^2+4k-2+1-k}{2(\mathrm{e}-1)}\\&=\frac{2\mathrm{e}-\mathrm{e}^2+3k-1}{2(\mathrm{e}-1)}\end{aligned}$$

On a donc :

$$\mu=0\iff 2\mathrm{e}-\mathrm{e}^2+3k-1=0\iff k=\frac{-2\mathrm{e}+\mathrm{e}^2+1}{3}\iff k=\frac{(\mathrm{e}-1)^2}{3}.$$

La valeur moyenne de la fonction f_k sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}\,]$ est nulle si est seulement si $k=\dfrac{(\mathrm{e}-1)^2}{3}$

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.