Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + NSI, veuillez visiter :
bac-maths-nsi.fr/annales-sujets-et-corriges

Baccalauréat épreuve de spécialité (terminale)

Voie générale – spécialité J1 – Métropole – 8 septembre 2026

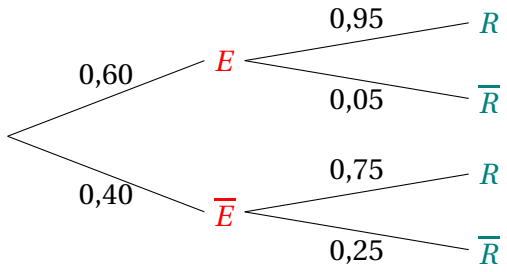
Sujet de remplacement – Corrigé

A. P. M. E. P.

Exercice 1 — 5 points

Partie A

1. On représente la situation à l'aide d'un arbre de probabilité



On a : $P(E \cap R) = P(E) \times P_E(R) = 0{,}60 \times 0{,}95 = 0{,}57$.

2. E et $\overline{E}$ forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} P(R) &= P(E \cap R) + P\left(\overline{E} \cap R\right) \\ &= 0{,}57 + 0{,}40 \times 0{,}75 \\ &= 0{,}57 + 0{,}30 \\ &= 0{,}87 \end{aligned}$$

Cela signifie que dans cette entreprise, 87 % des livraisons respectent le délai de livraison.

3. On cherche $P_R(E)$: $P_R(E) = \dfrac{P(E \cap R)}{P(R)} = \dfrac{0{,}57}{0{,}87} = \dfrac{19}{29} \approx 0{,}655$.

Partie B

1. On considère l'expérience aléatoire « choisir une livraison effectuée par un livreur expérimenté ». C'est une épreuve de Bernoulli dont le succès est l'évènement « le délai est respecté ». La probabilité du succès est $p = 0{,}95$.

On répète cette expérience $n = 200$ fois de manière identique et indépendante (tirages assimilés à des tirages avec remise) donc la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0{,}95$.

2. L'évènement « tous les délais sont respectés » est l'évènement $\{X = 200\}$.

$P(X = 200) = \binom{200}{200} \times 0{,}95^{200} \times 0{,}05^0 = 0{,}95^{200} \approx 3{,}5 \times 10^{-5}$.

On a donc $P(X = 200) > 0$: l'évènement n'est pas impossible, il est seulement très peu probable (sa probabilité arrondie à 10^{-3} est égale à 0,000).

3. $P(X \geqslant 190) = 1 - P(X \leqslant 189)$.

La calculatrice donne $P(X \geqslant 190) \approx 0{,}583$. Cela signifie que la probabilité qu'au moins 190 des 200 colis de l'échantillon soient livrés dans les délais est d'environ 58,3 %.

Partie C

1. X_A suit la loi binomiale de paramètres $n = 120$ et $p = 0{,}85$ donc :

$E(X_A) = 120 \times 0{,}85 = 102$ et $V(X_A) = 120 \times 0{,}85 \times 0{,}15 = 15{,}3$.

X_B suit la loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0{,}90$ donc :

$E(X_B) = 80 \times 0{,}90 = 72$ et $V(X_B) = 80 \times 0{,}90 \times 0{,}10 = 7{,}2$.

2. Par linéarité de l'espérance : $E(S) = E(X_A) + E(X_B) = 102 + 72 = 174$.

3. Si les variables aléatoires X_A et X_B sont indépendantes, alors la variance de leur somme est la somme de leurs variances :

$V(S) = V(X_A) + V(X_B) = 15{,}3 + 7{,}2 = 22{,}5$.

C'est donc l'indépendance de X_A et X_B qui permet d'affirmer que $V(S) = 22{,}5$; elle est assurée ici par l'énoncé (les livraisons d'une zone n'ont pas d'incidence sur celles de l'autre).

4. L'intervalle [165 ; 183] est centré sur $E(S) = 174$: $S \in [165\ ;\ 183] \iff \big|S - 174\big| \leqslant 9$.

Comme S ne prend que des valeurs entières, cela équivaut à $\big|S - 174\big| < 10$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $a > 0$, on a : $P\big(|S - E(S)| \geqslant a\big) \leqslant \dfrac{V(S)}{a^2}$.

En l'appliquant pour $a = 10$, on obtient : $P\big(|S - 174| \geqslant 10\big) \leqslant \dfrac{22{,}5}{10^2}$ soit $P\big(|S - 174| \geqslant 10\big) \leqslant 0{,}225$.

En passant à l'évènement contraire :

$P\big(S \in [165\ ;\ 183]\big) = P\big(|S - 174| < 10\big) = 1 - P\big(|S - 174| \geqslant 10\big) \geqslant 1 - 0{,}225$.

On peut donc conclure : $P\big(S \in [165\ ;\ 183]\big) \geqslant 0{,}775$.

La probabilité que le nombre total de colis livrés dans les délais soit compris entre 165 et 183 est au moins de 77,5 %.

Exercice 2 — 5 points

Partie A

1. La fonction f est dérivable sur $]-3\,;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.

On a, pour tout réel $x > -3$: $f'(x) = \dfrac{2(x+3) - 2x \times 1}{(x+3)^2} = \dfrac{2x + 6 - 2x}{(x+3)^2} = \dfrac{6}{(x+3)^2}$.

Pour tout $x > -3$, $(x+3)^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $]-3\,;+\infty[$.

2. **Initialisation.** Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et $u_1 = f(1) = \dfrac{2}{4} = 0{,}5$.

On vérifie que $0 \leqslant 0{,}5 \leqslant 1 \leqslant 1$ donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité. Soit n un entier naturel, on suppose que la propriété est vraie pour cet entier n, c'est-à-dire que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$. Il faut démontrer que $0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

Les nombres 0, u_{n+1}, u_n et 1 appartiennent à $[0\,;1] \subset]-3\,;+\infty[$, intervalle sur lequel la fonction f est croissante.

D'après l'hypothèse de récurrence, et puisque f est croissante sur $[0\,;1]$:

$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1 \Longrightarrow f(0) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$

$\Longrightarrow 0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 0{,}5$

Comme $0{,}5 \leqslant 1$, on a bien $\quad 0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

Ainsi la propriété est héréditaire.

Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire donc elle est vraie pour tout entier naturel n.

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

3. D'après la question précédente, la suite (u_n) est décroissante $(u_{n+1} \leqslant u_n)$ et minorée par 0 : on en déduit, d'après le théorème de convergence monotone, qu'elle est convergente.

Partie B

1. Pour tout entier naturel n :

$v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{u_n+3}{2u_n} = \dfrac{u_n}{2u_n} + \dfrac{3}{2u_n} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2} \times \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{3}{2}v_n + \dfrac{1}{2}$.

2. Pour tout entier naturel n :

$w_{n+1} = v_{n+1} + 1 = \dfrac{3}{2}v_n + \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}v_n + \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}\left(v_n + 1\right) = \dfrac{3}{2}w_n$.

De plus $\quad w_0 = v_0 + 1 = \dfrac{1}{u_0} + 1 = 2$.

La suite (w_n) est donc géométrique de raison $q = \dfrac{3}{2}$ et de premier terme $w_0 = 2$.

3. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad w_n = w_0 \times q^n = 2\left(\dfrac{3}{2}\right)^n \quad$ donc $\quad v_n = w_n - 1 = 2\left(\dfrac{3}{2}\right)^n - 1$.

Comme $\quad u_n = \dfrac{1}{v_n}, \quad$ on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n = \dfrac{1}{2\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}$.

4. On a : $\quad \dfrac{3}{2} > 1 \quad$ donc $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^n = +\infty \quad$ et $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(\dfrac{3}{2}\right)^n - 1 = +\infty$.

Par limite de l'inverse : $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

5. **a.** La boucle doit tourner tant que $u_n > 10^{-3}$, et chaque tour calcule le terme suivant avec $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n+3}$. Voici le script Python complété :

```
def seuil():
    n = 0
    u = 1
    while u > 10**(-3) :
        n = n + 1
        u = 2*u/(u+3)
    return n
```

b. On cherche le plus petit entier n tel que $u_n \leqslant 10^{-3}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad 2\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 > 0$, donc :

$$\begin{aligned}
u_n \leqslant 10^{-3} &\iff \frac{1}{2\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1} \leqslant 10^{-3} \\
&\iff 2\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 \geqslant 1\,000 \\
&\iff \left(\frac{3}{2}\right)^n \geqslant 500{,}5 \\
&\iff n\ln(1{,}5) \geqslant \ln(500{,}5) \quad \text{car la fonction ln est croissante sur }]0\,;+\infty[\\
&\iff n \geqslant \frac{\ln(500{,}5)}{\ln(1{,}5)} \quad \text{car } \ln(1{,}5) > 0
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(500{,}5)}{\ln(1{,}5)} \approx 15{,}3$.

(Vérification : $u_{15} \approx 1{,}14 \times 10^{-3} > 10^{-3}$ et $u_{16} \approx 7{,}62 \times 10^{-4} \leqslant 10^{-3}$.)

La fonction `seuil()` renvoie donc 16.

Exercice 3 — 4 points

1. **Affirmation 1** :

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires (la première coordonnée de $\vec{v}$ est nulle, pas celle de $\vec{u}$).

On cherche deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$: $\begin{cases} 2 = a \\ 1 = b \\ 0 = 2a + 3b \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ 0 = 7 \end{cases}$

La dernière ligne est fausse : le vecteur $\vec{w}$ n'est pas une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Les trois vecteurs ne sont donc pas coplanaires : ils forment une base de l'espace.

L'affirmation est **vraie**.

2. **Affirmation 2** :

On a $\overrightarrow{\text{CD}}\begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

Les points A, B et C n'étant pas alignés, les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ ne sont pas colinéaires donc ils forment une base du plan (ABC).

$\overrightarrow{\text{CD}} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} = 0 \times 1 + 3 \times (-2) + (-3) \times (-2) = 0$ et $\overrightarrow{\text{CD}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = 0 \times (-1) + 3 \times (-1) + (-3) \times (-1) = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{\text{CD}}$ est orthogonal à deux vecteurs formant une base du plan (ABC) donc le vecteur $\overrightarrow{\text{CD}}$ est normal au plan (ABC) et la droite (CD) est orthogonale au plan (ABC).

L'affirmation est **vraie**.

3. **Affirmation 3** :

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ est normal au plan P_1 donc une équation du plan P_1 est de la forme

$$x - 2y + 3z + d = 0$$

Le point E(1 ; 1 ; −1) appartient au plan P_1 donc on doit avoir $1-2\times1+3\times(-1)+d=0$ soit $d=4$.

Ainsi, l'équation $x-2y+3z+4=0$ est une équation cartésienne du plan P_1.

Le point M(2 ; 2 ; −1) appartient bien à la droite d (pour $t=1$), mais :

$x_M-2y_M+3z_M+4=2-4-3+4=-1\neq0$.

On en déduit que M n'appartient pas à P_1 : ce n'est donc pas le point d'intersection de d et P_1.

L'affirmation est **fausse**.

4. Affirmation 4 :

La distance du point N au plan P_2 est la distance NH où H est le projeté orthogonal de N sur le plan P_2. Il faut donc vérifier que H appartient à P_2 et que le vecteur $\overrightarrow{\text{NH}}$ est normal à P_2.

On a $1+2\times(-2)-2\times0+3=0$

Les coordonnées de H vérifient l'équation du plan P_2 donc H appartient à P_2.

Le vecteur $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ est normal au plan P_2 et $\overrightarrow{\text{NH}}\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{\text{NH}}=-\overrightarrow{n_2}$: les vecteurs $\overrightarrow{\text{NH}}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont colinéaires et $\overrightarrow{\text{NH}}$ est normal à P_2.

H est donc le projeté orthogonal de N sur P_2 et la distance de N au plan P_2 est $\text{NH}=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+2^2}=\sqrt{9}=3$.

L'affirmation est **vraie**.

Exercice 4 — 6 points

Partie A

1. $2y'+3y=0 \iff y'=-\dfrac{3}{2}y$.

Les solutions de l'équation $y'=ay$ sont les fonctions $t\longmapsto C\,\text{e}^{at}$, avec $C\in\mathbb{R}$.

Les solutions de (E') sont donc les fonctions $t\longmapsto C\,\text{e}^{-\frac{3}{2}t}$, avec $C\in\mathbb{R}$.

2. La fonction f est solution de (E) donc $2f'+3f=8\,\text{e}^{-\frac{3}{2}t}$. Par suite, par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned}g \text{ solution de } (E) &\iff 2g'+3g=8\,\text{e}^{-\frac{3}{2}t}\\ &\iff 2g'+3g=2f'+3f\\ &\iff 2(g-f)'+3(g-f)=0\\ &\iff g-f \text{ solution de } (E')\end{aligned}$$

3. D'après les questions 1 et 2, g est solution de (E) si et seulement s'il existe un réel C tel que, pour tout $t\geqslant0$, $g(t)-f(t)=C\,\text{e}^{-\frac{3}{2}t} \iff g(t)=C\,\text{e}^{-\frac{3}{2}t}+f(t) \iff g(t)=C\,\text{e}^{-\frac{3}{2}t}+4t\,\text{e}^{-\frac{3}{2}t}$

Les solutions de (E) sont donc les fonctions $t\longmapsto(4t+C)\,\text{e}^{-\frac{3}{2}t}$, avec $C\in\mathbb{R}$.

4. $g(0)=0 \iff (4\times0+C)\,\text{e}^0=0 \iff C=0$.

Une seule solution de (E) s'annule en 0 : la fonction f définie par $f(t)=4t\,\text{e}^{-\frac{3}{2}t}$.

Partie B

1. On a : $\lim\limits_{t\to+\infty}4t=+\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\text{e}^{-\frac{3}{2}t}=0$, sous cette forme, on a donc une forme indéterminée.

Mais, pour tout $t \geqslant 0$, on a : $f(t) = \dfrac{8}{3} \times \dfrac{3}{2} t\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t} = \dfrac{8}{3} X\,\mathrm{e}^{-X}$ avec $X = \dfrac{3}{2}t$.

$\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{3}{2}t = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} X\,\mathrm{e}^{-X} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X}{\mathrm{e}^X} = 0$, d'après la propriété des croissances comparées.
On obtient alors, par composition : $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

À long terme, le médicament est totalement éliminé du sang.

2. a. On a, pour tout $t \geqslant 0$: $f'(t) = 4 \times \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t} + 4t \times \left(-\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}\right) = 4\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t} - 6t\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}$.

Soit $f'(t) = (4 - 6t)\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}$.

b. Pour tout $t \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t} > 0$ donc le signe de $f'(t)$ est le même que celui de $4 - 6t$.

Or $4 - 6t > 0 \iff t < \dfrac{2}{3}$.

De plus, on a : $f(0) = 0$ et $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = 4 \times \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2} \times \frac{2}{3}} = \dfrac{8}{3}\mathrm{e}^{-1} = \dfrac{8}{3\,\mathrm{e}} \approx 0{,}981$.

On obtient le tableau de variations

t	0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
signe de $4 - 6t$		$+$	0	$-$	
signe de $f'(t)$		$+$	0	$-$	
variation de f	0	↗	$\frac{8}{3\mathrm{e}}$	↘	0

c. D'après le tableau de variations, la quantité de médicament dans le sang est maximale au bout de $\dfrac{2}{3}$ h, soit 40 minutes. Elle vaut alors $\dfrac{8}{3\,\mathrm{e}} \approx 0{,}981$ mg.

3. Sur l'intervalle $[1\ ;\ 3]$, inclus dans $\left[\dfrac{2}{3}\ ;\ +\infty\right[$, la fonction f est dérivable donc continue. Elle est strictement décroissante sur cet intervalle.
De plus, on a : $f(1) = 4\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} \approx 0{,}893$ et $f(3) = 12\,\mathrm{e}^{-\frac{9}{2}} \approx 0{,}133$, donc $0{,}5 \in \big[f(3)\ ;\ f(1)\big]$.
Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 0{,}5$ admet une unique solution α sur $[1\,;3]$.
La calculatrice permet d'obtenir :
$f(1{,}76) \approx 0{,}502$ et $f(1{,}77) \approx 0{,}498$ donc $1{,}76 < \alpha < 1{,}77$.

4. Condition 1. Le comprimé contient 1 mg : la moitié du médicament est éliminée dès que la quantité présente dans le sang est inférieure ou égale à 0,5 mg.
La fonction f est décroissante sur $\left[\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$ et $f(\alpha) = 0{,}5$, donc pour tout $t \geqslant \alpha$, $f(t) \leqslant 0{,}5$.
Or $\alpha < 1{,}77 < 2$; en particulier $f(2) = 8\,\mathrm{e}^{-3} \approx 0{,}398 < 0{,}5$.
La moitié du médicament est éliminée au bout de $\alpha \approx 1{,}77$ h, soit moins de 2 heures après la prise : la condition 1 est réalisée.

Condition 2. La quantité moyenne de médicament entre 1 h et 3 h est la valeur moyenne de f sur $[1\,;3]$: $m = \dfrac{1}{3-1}\displaystyle\int_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t$.

On pose, pour tout $t \geqslant 0$, $\quad u(t) = 4t \quad$ et $\quad v'(t) = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}$.

On a alors, pour tout $t \geqslant 0$: $\quad u'(t) = 4 \quad$ et on peut choisir $\quad v(t) = -\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}$.

Par intégration par parties, on a :
$$\begin{aligned}\int_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{8}{3}t\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}\right]_1^3 + \int_1^3 \frac{8}{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}\,\mathrm{d}t\\ &= \left[-\frac{8}{3}t\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t} - \frac{16}{9}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}\right]_1^3\\ &= \left[-\frac{8}{9}(3t+2)\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}\right]_1^3\\ &= -\frac{8}{9}\times 11\,\mathrm{e}^{-\frac{9}{2}} + \frac{8}{9}\times 5\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\\ &= \frac{8}{9}\left(5\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} - 11\,\mathrm{e}^{-\frac{9}{2}}\right)\end{aligned}$$

On obtient donc $\quad m = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{8}{9}\left(5\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} - 11\,\mathrm{e}^{-\frac{9}{2}}\right) = \dfrac{4}{9}\left(5\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} - 11\,\mathrm{e}^{-\frac{9}{2}}\right) \approx 0{,}442.$

La quantité moyenne de médicament entre 1 h et 3 h est d'environ 0,442 mg, supérieure à 0,40 mg : la condition 2 n'est pas réalisée.

L'essai clinique n'est donc pas validé.

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.