Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + NSI, veuillez visiter :
bac-maths-nsi.fr/annales-sujets-et-corriges

CORRIGE BAC

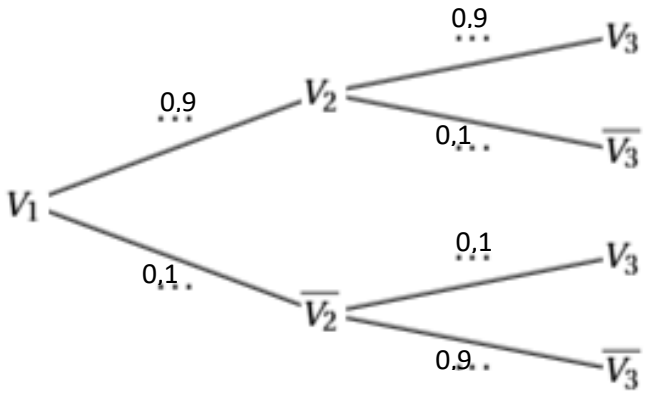
Année : 2025 **Matière :** Spé maths **Sujet :** Polynésie 2

Exercice 1 :

Partie A :

1.

a.



b.

Les événements V_2 et $\overline{V_2}$ forment un système complet d'événements (ou une partition de l'univers).
Donc, d'après la formule des probabilités totales :
$P(V_3) = P(V_3 \cap V_2) + P(V_3 \cap \overline{V_2}) = P(V_2)P_{V_2}(V_3) + P(\overline{V_2})P_{\overline{V_2}}(V_3)$.
Donc, $P(V_3) = 0{,}9 \times 0{,}9 + 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}82$.
Ainsi, la probabilité pour que la troisième machine détienne la valeur 1 est de 0,82.

c.

On cherche $P_{V_3}(V_2)$.
Par définition, $P_{V_3}(V_2) = \frac{P(V_2 \cap V_3)}{P(V_3)} = \frac{P_{V_2}(V_3)P(V_2)}{P(V_3)}$.
Ainsi, $P_{V_3}(V_2) = \frac{0{,}9 \times 0{,}9}{0{,}82} \approx 0{,}988$.
La probabilité pour que la 2ème machine ait reçu la valeur 1 sachant que la troisième a reçu la valeur 1 est d'environ 0,988.

2.

a.

Soit $n \geq 1$.
Les événements V_n et $\overline{V_n}$ forment un système complet d'événements (ou une partition de l'univers).
Donc, d'après la formule des probabilités totales :
$p_{n+1} = P(V_{n+1} \cap V_n) + P(V_{n+1} \cap \overline{V_n}) = P_{V_n}(V_{n+1})P(V_n) + P_{\overline{V_n}}(V_{n+1})P(\overline{V_n})$.
Donc, $p_{n+1} = 0{,}9p_n + 0{,}1(1 - p_n)$.
Ainsi, pour tout $n \geq 1, p_{n+1} = 0{,}8p_n + 0{,}1$.

b.

Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 1, p_n = 0{,}5 \times 0{,}8^{n-1} + 0{,}5$.
Initialisation : $p_1 = 1$ d'après l'énoncé et $0{,}5 \times 0{,}8^{1-1} + 0{,}5 = 1$ donc $p_1 = 0{,}5 \times 0{,}8^{1-1} + 0{,}5$. La propriété est vraie au rang $k = 1$.
Hérédité : Soit $k \geq 1$ tel que la propriété soit vraie au rang k. Montrons qu'elle est vraie au rang $k + 1$.
D'après la question précédente, $p_{k+1} = 0{,}8p_k + 0{,}5$.
Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $p_k = 0{,}5 \times 0{,}8^{k-1} + 0{,}1$.
Donc, $p_{k+1} = 0{,}8(0{,}5 \times 0{,}8^{k-1} + 0{,}5) + 0{,}1 = 0{,}8 \times 0{,}5 \times 0{,}8^{k-1} + 0{,}8 \times 0{,}5 + 0{,}1 = 0{,}5 \times 0{,}8^{k} + 0{,}5$.
Ainsi, la propriété est héréditaire.

Conclusion : La propriété est vraie au rang $k = 1$ et elle est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie à tous les rangs.
Donc, pour tout $n \geq 1, p_n = 0{,}5 \times 0{,}8^{n-1} + 0{,}5$.

c.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8^{n-1} = 0$ car $0 \leq 0{,}8 < 1$.
Donc, par produit puis par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0{,}5$.
Ainsi, lorsque le numéro de la machine devient très grand, il y a une chance sur deux qu'elle détienne la valeur 1.

Partie B :

1.

L'instruction à la ligne 5 est un test qui fait appel à la fonction rand qui choisit un nombre aléatoire entre 0 inclus et 1 exclus. Si ce nombre est inférieur strictement à 0,1 (la probabilité pour que cela arrive est de 0,1), la ligne 6 est exécutée. Elle remplace alors donnee par 1-donnee, donc 0 est changé en 1 et 1 est changé en 0. Ces deux lignes caractérisent donc la possibilité aléatoire de transmission non fidèle qui intervient dans 10% des cas.

2.

La probabilité pour que simulation(4) renvoie la liste [1,1,1,1,1] est $P(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4 \cap V_5)$.
$P(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4 \cap V_5) = P_{V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4}(V_5) P(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4) = P_{V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4}(V_5) P_{V_1 \cap V_2 \cap V_3}(V_4) P(V_1 \cap V_2 \cap V_3)$ et ainsi de suite.
On trouve $P(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4 \cap V_5) = P_{V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4}(V_5) P_{V_1 \cap V_2 \cap V_3}(V_4) P_{V_1 \cap V_2}(V_3) P_{V_1}(V_2) P(V_1)$.
En continuant l'arbre pondéré de 1.a., on peut écrire :
$P(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4 \cap V_5) = 0{,}9 \times 0{,}9 \times 0{,}9 \times 0{,}9 \times 1 \approx 0{,}656$.
La probabilité pour que simulation(4) renvoie la liste [1,1,1,1,1] est d'environ 0,656.

La probabilité pour que simulation(6) renvoie la liste [1,0,1,0,0,1,1] est $P(V_1 \cap \overline{V_2} \cap V_3 \cap \overline{V_4} \cap \overline{V_5} \cap V_6 \cap V_7)$.
De la même manière que ci-dessus, on peut écrire que :
$P(V_1 \cap \overline{V_2} \cap V_3 \cap \overline{V_4} \cap \overline{V_5} \cap V_6 \cap V_7) =$
$P_{V_1 \cap \overline{V_2} \cap V_3 \cap \overline{V_4} \cap \overline{V_5} \cap V_6}(V_7) P_{V_1 \cap \overline{V_2} \cap V_3 \cap \overline{V_4} \cap \overline{V_5}}(V_6) P_{V_1 \cap \overline{V_2} \cap V_3 \cap \overline{V_4}}(\overline{V_5}) P_{V_1 \cap \overline{V_2} \cap V_3}(\overline{V_4}) P_{V_1 \cap \overline{V_2}}(V_3) P_{V_1}(\overline{V_2}) P(V_1)$.
En continuant l'arbre pondéré de la question 1.a., on peut écrire :
$P(V_1 \cap \overline{V_2} \cap V_3 \cap \overline{V_4} \cap \overline{V_5} \cap V_6 \cap V_7) = 0{,}9 \times 0{,}1 \times 0{,}9 \times 0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}1 \times 1 = 8{,}1 \times 10^{-5}$ (≈ 0 si l'on respecte la consigne concernant les arrondis).
La probabilité pour que simulation(6) renvoie la liste [1,0,1,0,0,1,1] est environ égale à 0.

Exercice 2 :

1.

Par lecture graphique, il semble que f soit croissante sur $]2, +\infty[$, que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$. Ainsi, $\mathcal{C}_f$ admet pour asymptote verticale la droite d'équation $x = 2$.

2.

Pour tout $x \in]2, +\infty[$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x\ln(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $\ln(x-2) = 0$ (un produit est nul si et seulement si au moins l'un des facteurs est nul). $0 \notin]2, +\infty[$ donc cette solution est rejetée.
$\Leftrightarrow x - 2 = 1$ (en appliquant la fonction exponentielle).
$\Leftrightarrow x = 3$.
L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est $\{3\}$.

3.

$\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x>2}} x - 2 = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \ln(X) = -\infty$ donc par composition, $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x>2}} \ln(x-2) = -\infty$.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} x = 2$.
Donc par produit, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = -\infty$.
Ce résultat est en accord avec la conjecture faire en question 1.

4.

Soit $h : x \mapsto \ln(x-2)$. On pose pour $x \in]2,+\infty[, u(x) = x-2$.
Ainsi, pour tout $x \in]2,+\infty[, h(x) = \ln\big(u(x)\big)$. Donc, g est dérivable sur $]2,+\infty[$ car u l'est et pour tout $x \in]2,+\infty[, h'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{x-2}$.
Donc, f est dérivable sur $]2,+\infty[$ en tant produit de fonctions dérivables.
Pour tout $x \in]2,+\infty[, f'(x) = \ln(x-2) + \frac{x}{x-2}$.

5.

a.

On réutilise la dérivation de la fonction h faite précédemment.
Ainsi, g est dérivable sur $]2,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables.
Pour tout $x \in]2,+\infty[, g'(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{x-2-x}{(x-2)^2} = \frac{x-2-2}{(x-2)^2} = \frac{x-4}{(x-2)^2}$.

b.

Pour tout $x \in]2,+\infty[, \frac{1}{(x-2)^2} > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $x-4$ sur $]2,+\infty[$.
Pour tout $x \in]2,+\infty[, x-4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$. On en déduit le signe de $x-4$ (signe d'une fonction affine de coefficient directeur 1>0.

x	2		4		$+\infty$
Signe de $x-4$		-	0	+	
Signe de $g'(x)$	|	-	0	+	
Variations de g	|$+\infty$	↘	$\ln(2)+2$	↗	$+\infty$

$g(4) = \ln(4-2) + \frac{4}{4-2} = \ln(2)+2$.

c.

On a $\ln(2) + 2 \approx 2{,}69 > 0$.
Or, d'après le tableau de variations ci-dessus, pour tout $x \in]2,+\infty[, g(x) \geq \ln(2) + 2$.
Donc, pour tout $x \in]2,+\infty[, g(x) > 0$.

d.

La fonction $g = f'$ est strictement positive sur $]2,+\infty[$ d'après la question précédente. Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

6.

La fonction $f'' = g'$ est, d'après le tableau question 5b, positive sur $[4,+\infty[$ et négative sur $]2,4]$. Ainsi, la fonction f est convexe sur $[4,+\infty[$ et concave sur $]2,4]$.
La fonction f'' s'annule en changeant de signe en 4. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc pour point d'inflexion le point d'abscisse 4. $f(4) = 4\ln(4-2) = 4\ln(2)$. Les coordonnées de ce point sont donc $(4, 4\ln(2))$.

7. On cherche les solutions de l'équation $f'(x) = 3 \Leftrightarrow g(x) = 3$.

D'après le tableau de variations de la question 5b, la fonction g est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $]2,4[$. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} g(x) = +\infty$, $g(4) = \ln(2)+2$ et $3 \in]\ln(2)+2\ , +\infty[$ (on peut le vérifier avec la calculatrice).
Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 3$ admet une unique solution sur $]2,4[$.

La fonction g est continue (car dérivable) est strictement croissante sur $[4, +\infty[$.
$g(4) = \ln(2)+2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $3 \in [\ln(2)+2, +\infty[$.
Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 3$ admet une unique solution sur $[4, +\infty[$.

Les deux intervalles traités ci-dessus sont disjoints et leur union est $]2, +\infty[$. Donc, l'équation $g(x) = 3$ admet exactement deux solutions sur $]2, +\infty[$.
Ainsi, il existe exactement deux valeurs de x pour lesquelles $\mathcal{C}_f$ admet une tangente de coefficient directeur 3.

Exercice 3 :

1.

Montrons pour cela que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (-2, 1, 5)$ et $\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A) = (-1, -2, 0)$.
Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C définissent un plan.

2.

Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (-2) \times (-1) + 1 \times (-2) + 5 \times 0 = 0$ donc ces vecteurs sont orthogonaux. Ainsi, le triangle ABC est rectangle en A.

3.

a.

Montrons que $\vec{u}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui définissent le plan (ABC).
$\vec{u}.\overrightarrow{AB} = 2 \times (-2) - 1 \times 1 + 1 \times 5 = 0$ et $\vec{u}.\overrightarrow{AC} = 2 \times (-1) + (-1) \times (-2) + 1 \times 0 = 0$
Ainsi, $\vec{u}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$ donc la droite Δ est orthogonale au plan (ABC) car $\vec{u}$ en est un vecteur directeur.

b.

$\vec{u} = (2, -1,1)$ est, d'après la question précédente, un vecteur normal au plan (ABC).
Donc, une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + z + d = 0$ où d est un réel à déterminer.
Le point C appartient au plan (ABC) donc vérifie l'équation cartésienne trouvée.
Ainsi, $2x_C - y_C + z_C + d = 0$ soit $-1 + d = 0$ d'où $d = 1$.
Donc, une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + z + 1 = 0$.

c.

La droite Δ a pour vecteur directeur $\vec{u} = (2, -1,1)$ et passe par le point $D(-2,2,1)$ donc une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

4.

Pour cela, montrons que H est le point d'intersection entre la droite Δ et le plan (ABC).

D'abord : $2x_H - y_H + z_H + 1 = 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{4}{3} + \frac{5}{3} + 1 = 0$ donc le point H appartient au plan (ABC).

Ensuite : cherchons $t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x_H = -2 + 2t \\ y_H = 2 - t \\ z_H = 1 + t \end{cases}$.

$$\begin{cases} x_H = -2 + 2t \\ y_H = 2 - t \\ z_H = 1 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{3} = -2 + 2t & t = \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} = 2 - t & \Leftrightarrow \quad t = \frac{2}{3}. \\ \frac{5}{3} = 1 + t & \left(t = \frac{2}{3}\right. \end{cases}$$

Un tel t existe donc. Le point H appartient donc à la droite Δ. Cette droite n'étant pas incluse dans le plan (ABC) (elle lui est orthogonale), H est le point d'intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
Comme la droite Δ est orthogonale au plan (ABC) et passe par le point D, H est bien le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

5.

a.

$\overrightarrow{DH} = (x_H - x_D, y_H - y_D, z_H - z_D) = \left(-\frac{2}{3} + 2, \frac{4}{3} - 2, \frac{5}{3} - 1\right) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Donc, $DH = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{\sqrt{4\times6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

b.

Calculons l'aire de base ABC du tétraèdre. Le triangle ABC est rectangle en A donc, si l'on choisit AB comme base du triangle, la hauteur relative à cette base est AC.
Ainsi, $\mathcal{B} = \frac{AB \times AC}{2}$.
$AB = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{30}$ et $AC = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$ (les coordonnées des vecteurs ont été déterminées à la question 1).
Donc, $\mathcal{B} = \frac{\sqrt{30}\times\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{150}}{2} = \frac{\sqrt{25\times6}}{2} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$.
La hauteur relative à cette base est DH car H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC) d'après la question 4.
Ainsi, $V = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times DH = \frac{1}{3} \times \frac{5\sqrt{6}}{2} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} \qquad V = \frac{30}{9} = \frac{10}{3}$.

6.

La représentation paramétrique de la droite d donne accès à un vecteur directeur de cette droite qui est $\vec{v} = (-2, -3, 1)$.
$\vec{v}.\vec{u} = -2 \times 2 - 3 \times (-1) + 1 \times 1 = -4 + 3 + 1 = 0$. Donc, $\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ qui est lui-même orthogonal au plan (ABC). Donc, $\vec{v}$ est un vecteur du plan (ABC).
On en déduit que la droite d est parallèle au plan (ABC).

Exercice 4 :

Affirmation n°1 :

Cherchons le nombre de 3-uplets d'éléments distincts de E. Il y a ordre mais pas répétition.
Ainsi, le nombre de 3-uplets d'éléments distincts de E qui est de cardinal 7 est $\frac{7!}{(7-3)!}$.
$\frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$. Il y a donc 210 3-uplets d'éléments distincts de E.
Le nombre de combinaisons de 4 éléments de F qui est de cardinal 10 est $\binom{10}{4}$.
$\binom{10}{4} = 210$. Il y a donc 210 combinaisons de 4 éléments de F.

$210 = 210$, donc il s'agit du même résultat.
Donc, l'affirmation est fausse.

Affirmation n°2 :
Le carré $ABCD$ a pour côté 3 donc son aire est $\mathcal{A}_{carré} = 3^2 = 9$.
La zone hachurée est l'aire comprise entre la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$. Son aire est donc :

$$\mathcal{A}_{hachurée} = \int_0^3 f(x)dx.$$

$$\mathcal{A}_{hachurée} = \int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9.$$

En effet, la fonction $x \mapsto \frac{x^3}{3}$ est une primitive de la fonction carré sur $[0,3]$.
On remarque que $\mathcal{A}_{carré} = \mathcal{A}_{hachurée}$. Donc, l'affirmation est vraie.

Affirmation n°3 :
Intégrons par parties.
On pose $u'(x) = x$ et $v(x) = \ln(x)$. La fonction v est dérivable sur $[1,2]$ et pour tout $x \in [1,2]$, $v'(x) = \frac{1}{x}$.
De plus, on peut choisir $u(x) = \frac{x^2}{2}$.
Les fonctions u et v sont continues (car dérivables) et à dérivée continue (car dérivable) sur $[1,2]$.
Donc, $\int_1^2 u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_1^2 - \int_1^2 u(x)v'(x)dx$
Ainsi, $J = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2x}dx = \frac{2^2}{2}\ln(2) - \frac{1^2}{2}\ln(1) - \int_1^2 \frac{x}{2}dx = 2\ln(2) - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2$ car la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{4}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{x}{2}$ sur $[1,2]$.
Ainsi, $J = 2\ln(2) - \frac{2^2}{4} + \frac{1^2}{4}$. $J = 2\ln(2) - \frac{3}{4}$. On trouve que $J \neq \frac{7}{11}$ (ce qui peut être vérifié avec la calculatrice).
Ainsi, l'affirmation est fausse.

Affirmation n°4 :
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
D'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x + 2e^{2x}$.
D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2f(x) - e^x = 2e^x + 2e^{2x} - e^x = e^x + 2e^{2x}$.
On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2f(x) - e^x$.
Donc, f est solution de (E).
Ainsi, l'affirmation est vraie.

Affirmation n°5 :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \cos(n) \leq 1$.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x-1)e^n - 1 \leq u_n \leq (x-1)e^n + 1$ (on ajoute $(x-1)e^n$).
$\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$ et comme $0 \leq x < 1$, $-1 \leq x - 1 < 0$. Donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} (x-1)e^n = -\infty$.
Par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} (x-1)e^n + 1 = -\infty$.
Ainsi, d'après le théorème de comparaison (on peut laisser de côté le membre le plus à gauche de l'inégalité), $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
Donc, l'affirmation est vraie.

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.