Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + NSI, veuillez visiter :
bac-maths-nsi.fr/annales-sujets-et-corriges

Corrigé du baccalauréat Métropole Antilles-Guyane

12 septembre 2024 – Jour 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Exercice 1 — 5 points

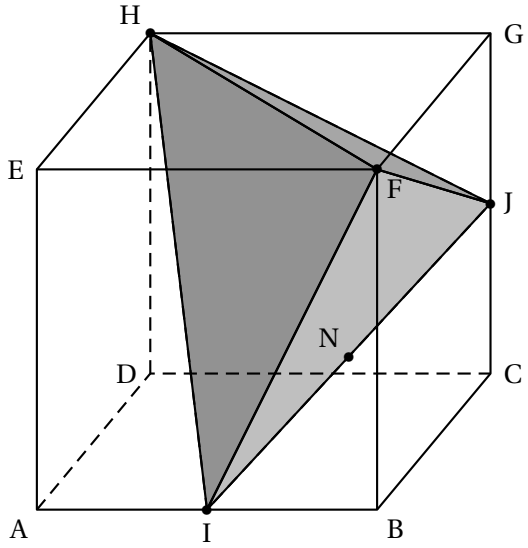
On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous.

Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CG].

Le point N est le milieu du segment [IJ].

L'objectif de cet exercice est de calculer le volume du tétraèdre HFIJ.

On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.



1. **a.** A(0 ; 0 ; 0) et B(1 ; 0 ; 0) donc I(0,5 ; 0 ; 0) ;

C(1 ; 1 ; 0) et G(1 ; 1 ; 1) donc J(1 ; 1 ; 0,5).

Donc N(0,75 ; 0,5 ; 0,25).

b. $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}1-0,5\\1-0\\0,5-0\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0,5\\1\\0,5\end{pmatrix}$.

De même avec F(1 ; 0 ; 1), $\overrightarrow{NF}\begin{pmatrix}1-0,5\\0-0,5\\1-0,25\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{NF}\begin{pmatrix}0,25\\0-0,5\\0,75\end{pmatrix}$.

c. On calcule le produit scalaire des deux vecteurs précédents :

$\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{NF} = 0,125 - 0,5 + 0,375 = 0$: le produit scalaire est nul, les deux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{NF}$ sont orthogonaux.

On admet que $NF = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

d. On a $\text{IJ}^2 = 0{,}5^2 + 1^2 + 0{,}5^2 = 1{,}5 = \dfrac{3}{2} = \dfrac{6}{4}$, d'où $\text{IJ} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

On a démontré que la droite (NF) est perpendiculaire à la droite (IJ) : la droite (FN) est donc la hauteur issue de N dans le triangle FIJ.

L'aire de ce triangle est donc égale à $\dfrac{\text{IJ} \times \text{FN}}{2} = \dfrac{\frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{\sqrt{14}}{4}}{2} = \dfrac{\sqrt{21}}{8}$.

2. On considère le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

a. On a $\vec{u} \cdot \vec{\text{IJ}} = 2 - 1 - 1 = 0$. D'autre part $\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{NF}} = 1 + 0{,}5 - 1{,}5 = 0$, donc le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan FIJ (car la droite (NF) est perpendiculaire à la droite (IJ)) : il est donc normal à ce plan.

b. On sait que les coordonnées du vecteur normal au plan sont les coefficients respectifs de x, y et z dans l'équation de celui-ci :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{FIJ}) \iff 4x - y - 2z + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$.

Ainsi par exemple : $\text{F}(1\,;\,0\,;\,1) \in (\text{FIJ}) \iff 4 - 0 - 2 + d = 0 \iff d = -2$.

Conclusion : $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{FIJ}) \iff 4x - y - 2z - 2 = 0$

c. La droite d a donc pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}$ et contient le point H. Ses équations paramétriques s'obtiennent en traduisant la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{\text{H}M}$ et $\vec{u}$: avec H(0;1; 1),

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (d) \iff \overrightarrow{\text{H}M} = t\vec{u}$, avec $t \in \mathbb{R}$, soit :

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (d) \iff \begin{cases} x - 0 &= 4t \\ y - 1 &= -t \\ z - 1 &= -2t \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 4t \\ y &= 1 - t \\ z &= 1 - 2t \end{cases}$$

d. La droite d est perpendiculaire au plan (FIJ) en un point K dont les coordonnées vérifient les équations de d et celle de (FIJ) soit le système :

$$\begin{cases} x &= 4t \\ y &= 1 - t \\ z &= 1 - 2t \\ 4x - y - 2z - 2 &= 0 \end{cases}$$

En remplaçant x, y et z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation, on obtient :

$4 \times 4t - (1 - t) - 2(1 - 2t) - 2 = 0 \iff 16t - 1 + t - 2 + 4t - 2 = 0 \iff 21t - 5 = 0 \iff t = \dfrac{5}{21}$.

Les coordonnées de K sont donc : $\begin{cases} x &= 4 \times \frac{5}{21} \\ y &= 1 - \frac{5}{21} \\ z &= 1 - 2 \times \frac{5}{21} \end{cases} \iff \begin{cases} x &= \frac{20}{21} \\ y &= \frac{16}{21} \\ z &= \frac{11}{21} \end{cases}$

La distance de H au plan (FIJ) est donc égale à HK et avec $\overrightarrow{\text{HK}}\begin{pmatrix}\frac{20}{21}\\-\frac{5}{21}\\-\frac{10}{21}\end{pmatrix}$,

$\text{HK}^2 = \left(\frac{20}{21}\right)^2 + \left(-\frac{5}{21}\right)^2 + \left(-\frac{10}{21}\right)^2 = \frac{400+25+100}{21^2} = \frac{525}{21^2} = \frac{25 \times 21}{21^2}$, donc

$\text{HK} = \dfrac{5\sqrt{21}}{21}$.

e. D'après la question précédente [HK] est la hauteur relative à la base (FIJ) du tétraèdre HFIJ, donc le volume de celui-ci est :

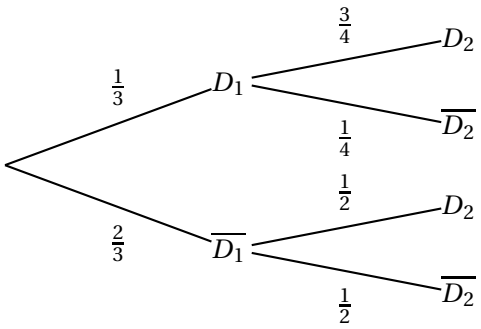
$V = \dfrac{1}{3} \times \mathscr{A}(\text{FIJ}) \times \text{HK} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sqrt{21}}{8} \times \dfrac{5\sqrt{21}}{21} = \dfrac{5 \times 3 \times 7}{3 \times 8 \times 21} = \dfrac{5}{24}$.

Exercice 2 — 5 points

Partie A : étude du cas particulier où $n = 2$

Dans cette partie, le robot réalise deux déplacements successifs.

1. On complète l'arbre pondéré suivant :



2. On a $P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \times P_{D_1}(D_2) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$.

3. De la même façon $P\left(\overline{D_1} \cap D_2\right) = P\left(\overline{D_1}\right) \times P_{\overline{D_1}}(D_2) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$.

D'après la loi des probabilités totales :

$p_2 = P(D_2) = P(D_1 \cap D_2) + P\left(\overline{D_1} \cap D_2\right) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{3+4}{3\times 4} = \dfrac{7}{12}$.

4. On a d'abord $p\left(\overline{D_2}\right) = 1 - p(D_2) = 1 - \dfrac{7}{12} = \dfrac{5}{12}$.

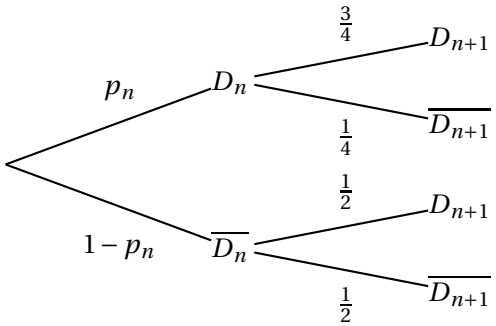
Il faut calculer la probabilité conditionnelle :

$$p_{\overline{D_2}}(D_1) = \frac{p\left(\overline{D_2} \cap D_1\right)}{p\left(\overline{D_2}\right)} = \frac{p\left(D_1 \cap \overline{D_2}\right)}{p\left(\overline{D_2}\right)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Partie B : étude de la suite (p_n).

1. $$p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$$

On reprend l'arbre initial en partant de la branche D_n pondérée par le nombre p_n et la branche $\overline{D_n}$ pondérée par $1 - p_n$, soit :



Toujours d'après la loi des probabilités totales :

$$p_{n+1} = P(D_{n+1}) = P(D_n) \times P_{D_n}(D_{n+1}) + P(\overline{D_n}) \times P_{\overline{D_n}}(D_{n+1}) = p_n \times \frac{3}{4} + (1 - p_n) \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{3}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p_n = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$$

2. **a.** On montre par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$p_n \leqslant p_{n+1} < \frac{2}{3}.$$

Initialisation : on a $p_1 = \frac{1}{3} = \frac{4}{12}$, $p_2 = \frac{7}{12}$ et $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$.

On a $\frac{4}{12} < \frac{7}{12} < \frac{8}{12}$, soit $p_1 < p_2 < \frac{2}{3}$: l'encadrement est vrai au rang 1.

Hérédité : soit n un naturel avec $n \geqslant 1$ et supposons que $p_n \leqslant p_{n+1} < \frac{2}{3}$; comme $\frac{1}{4} > 0$, on a donc par produit :

$\frac{1}{4}p_n \leqslant \frac{1}{4}p_{n+1} < \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$, soit $\frac{1}{4}p_n \leqslant \frac{1}{4}p_{n+1} < \frac{1}{6}$ et, en ajoutant à chaque membre $\frac{1}{2}$:

$\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{4}p_{n+1} + \frac{1}{2} < \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$, soit d'après la relation de récurrence démontrée à la question **1.** : $p_{n+1} < p_{n+2} < \frac{2}{3}$.

La relation est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion : la relation est vraie au rang 1 et si elle est vraie au rang n au moins égal à 1, elle l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $p_n < p_{n+1} < \frac{2}{3}$.

b. Le résultat précédent montre que la suite est croissante et majorée par $\frac{2}{3}$: d'après le théorème de la convergence monotone, elle converge donc vers un nombre réel inférieur ou égal à $\frac{2}{3}$.

3. **a.** Quel que soit $n \geqslant 1$, on a $u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}p_n + \frac{3}{6} - \frac{4}{6} = \frac{1}{4}p_n - \frac{1}{6}$

$$= \frac{1}{4}\left(p_n - \frac{4}{6}\right) = \frac{1}{4}\left(p_n - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4}u_n.$$

La relation $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n$, avec $n \geqslant 1$ montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$.

b. On sait que pour $n \geqslant 1$, $\quad u_n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Comme $-1 < \frac{1}{4} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = p_n - \frac{2}{3} = 0$ et finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{2}{3}$.

Conclusion : sur un grand nombre de déplacements du robot celui-ci se dirigera en moyenne deux fois sur trois à droite et donc une fois sur trois à gauche.

Partie C

La variable aléatoire X égale au nombre de déplacements vers la droite suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{4}$.

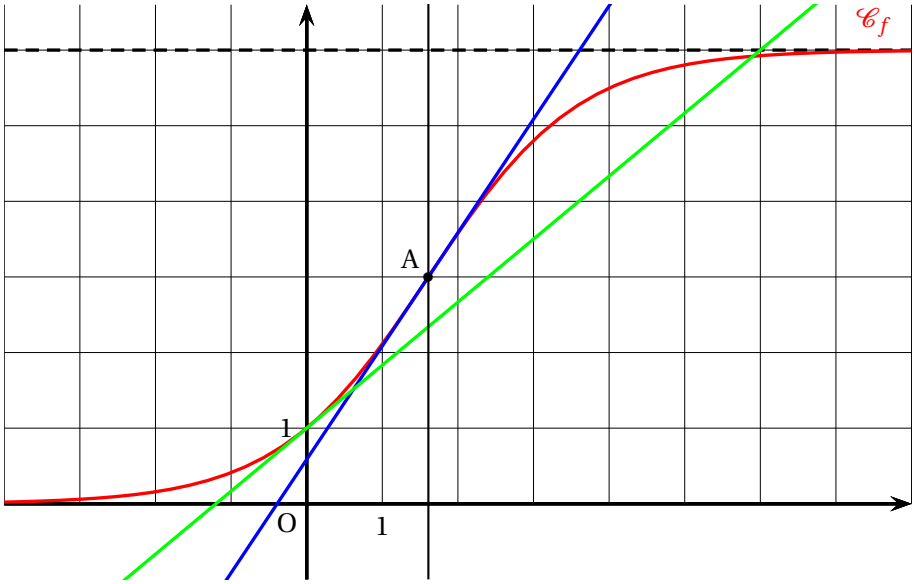
La seule possibilité de revenir au point de départ est de faire (globalement) 5 déplacements à droite et donc 5 déplacements à gauche, soit :

$P(X=5)=\binom{10}{5}\times\left(\frac{3}{4}\right)^5\times\left(\frac{1}{4}\right)^5\approx 0{,}0583$, soit 0,058 au millième près.

Exercice 3 — 5 points

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{6}{1+5\mathrm{e}^{-x}}$.



1. On a $f(\ln 5) = \dfrac{6}{1+5\mathrm{e}^{-\ln 5}}$.

Or $\mathrm{e}^{-\ln 5} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 5}} = \dfrac{1}{5}$, donc $f(\ln 5) = \dfrac{6}{1+5\times\frac{1}{5}} = \dfrac{6}{2} = 3$. Donc A $(\ln 5\,;3) \in \mathscr{C}_f$.

2. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+5\mathrm{e}^{-x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 6$.

Donc la droite d'équation $y = 6$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

3. **a.** Pour tout réel : $f'(x) = -6\times\dfrac{(1+5\mathrm{e}^{-x})'}{(1+5\mathrm{e}^{-x})^2} = -\dfrac{6\times5\times(-1)\mathrm{e}^{-x}}{(1+5\mathrm{e}^{-x})^2} = \dfrac{30\mathrm{e}^{-x}}{(1+5\mathrm{e}^{-x})^2}$

b. On sait que quel que soit $x\in\mathbb{R}$, $30\mathrm{e}^{-x} > 0$ et $(1+5\mathrm{e}^{-x})^2 > 0$; donc $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$: la fonction f est croissante (strictement) sur $\mathbb{R}$..

D'autre part $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+5\mathrm{e}^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Donc l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

Enfin $f(0) = \dfrac{6}{1+5\times1} = \dfrac{6}{6} = 1$: d'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$\ln 5$		$+\infty$
$f'(x)$		+		+		+	
$f(x)$	0	↗	1	↗	3	↗	6

4. **a.** Comme $30\mathrm{e}^{-x} > 0, 1+5\mathrm{e}^{-x} > 0$ et donc $(1+5\mathrm{e}^{-x})^3 > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de $5\mathrm{e}^{-x}-1$:

- $5\mathrm{e}^{-x}-1 = 0 \iff 5\mathrm{e}^{-x} = 1 \iff \mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{5} \Rightarrow -x = \ln\dfrac{1}{5} \iff -x = -\ln 5 \iff x = \ln 5$;

- $5\,\mathrm{e}^{-x}-1>0 \Rightarrow x>\ln 5$;
- $5\,\mathrm{e}^{-x}-1<0 \Rightarrow x<\ln 5$.

Conclusion : f est convexe sur l'intervalle $]-\infty\,;\,\ln 5[$, concave sur $]\ln 5\,;\,+\infty[$ et a en $\ln 5$ un point d'inflexion car la dérivée seconde change de signe en ce point : il s'agit du point A.

b. Une équation de la tangente T_0 à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est :

$M(x\,;\,y)\in T_0 \iff y-f(0)=f'(0)(x-0)$.

On a vu que $f(0)=1$ et $f'(0)=\dfrac{30\,\mathrm{e}^0}{\left(1+5\,\mathrm{e}^0\right)^2}=\dfrac{30}{36}=\dfrac{5}{6}$.

Donc $M(x\,;\,y)\in T_0 \iff y-1=\dfrac{5}{6}(x-0) \iff y=\dfrac{5}{6}x+1$.

Or on a vu que sur l'intervalle $]-\infty\,;\,\ln 5[$, la fonction f est convexe et par conséquent que sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est au dessus de toutes ses tangentes menées en un point de l'intervalle $]-\infty\,;\,\ln 5[$, donc en particulier au dessus de la tangente T_0 en $x=0$, donc numériquement :

$$f(x)\geqslant \frac{5}{6}x+1 \quad \text{sur }]-\infty\,;\,\ln 5[.$$

5. On considère une fonction F_k définie sur $\mathbb{R}$ par $F_k(x)=k\ln\left(\mathrm{e}^x+5\right)$, où k est une constante réelle.

a. F_k est une fonction composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (car $\mathrm{e}^x+5>0$), elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$: elle est une primitive de f si :

$F_k'(x)=f(x) \iff k\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+5}=\dfrac{6}{1+5\,\mathrm{e}^{-x}}$,

soit en multipliant chaque terme de $F_k'(x)$ par e^{-x} :

$k\dfrac{1}{1+5\,\mathrm{e}^{-x}}=\dfrac{6}{1+5\,\mathrm{e}^{-x}} \iff k=6$.

Donc $F_6(x)=6\ln\left(\mathrm{e}^x+5\right)$.

b. On a vu que $f(0)=1>0$ et la fonction est croissante ; elle est donc positive sur l'intervalle $[0\,;\,\ln 5]$.

L'aire demandée $\mathscr{A}$ est donc égale (en unités d'aire) à :

$$\mathscr{A}=\int_0^{\ln 5} f(x)\,\mathrm{d}x=[F_6(x)]_0^{\ln 5}=F_6(\ln 5)-F_6(0)=6\ln\left(\mathrm{e}^{\ln 5}+5\right)-6\ln\left(\mathrm{e}^0+5\right)$$
$$=6\ln 10-6\ln 6=6[\ln 10-\ln 6]=6\ln\frac{10}{6}=6\ln\frac{5}{3}.$$

Partie B

L'objectif de cette partie est d'étudier l'équation différentielle : $(E)\qquad y'=y-\dfrac{1}{6}y^2$.

1. On a $f(x)-\dfrac{1}{6}[f(x)]^2=\dfrac{6}{1+5\,\mathrm{e}^{-x}}-\dfrac{1}{6}\times\dfrac{36}{(1+5\,\mathrm{e}^{-x})^2}$

$$=\frac{6}{1+5\,\mathrm{e}^{-x}}-\frac{6}{(1+5\,\mathrm{e}^{-x})^2}=\frac{6(1+5\,\mathrm{e}^{-x})-6}{(1+5\,\mathrm{e}^{-x})^2}=\frac{30\,\mathrm{e}^{-x}}{(1+5\,\mathrm{e}^{-x})^2}=f'(x)$$

Donc f est bien une solution de l'équation (E).

2.
- Les solutions de l'équation $y'=-y$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x\longmapsto K\,\mathrm{e}^{-x}$ avec $K\in\mathbb{R}$;
- La fonction constante $x\longmapsto\dfrac{1}{6}$ est la seule fonction constante solution de l'équation à résoudre ;

- Les fonctions solutions de l'équation différentielle proposée sont les fonctions définies par :

$$x \longmapsto \frac{1}{6} + K\,\mathrm{e}^{-x} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

3. **a.** On a donc : $h'(x) = -h(x) + \dfrac{1}{6}$

Or si $h(x) = \dfrac{1}{g(x)}$, alors $h'(x) = -\dfrac{g'(x)}{[g(x)]^2}$.

L'équation précédente devient :

$-\dfrac{g'(x)}{[g(x)]^2} = -\dfrac{1}{g(x)} + \dfrac{1}{6}$ soit en multipliant par $[g(x)]^2$

$-g'(x) = -g(x) + \dfrac{1}{6}[g(x)]^2 \iff g'(x) = g(x) - \dfrac{1}{6}[g(x)]^2$ ce qui signifie que la fonction g est une solution de l'équation différentielle $y' = y - \dfrac{1}{6}y^2$.

b.

$$g_m(x) = \frac{6}{1 + 6m\,\mathrm{e}^{-x}}.$$

Puisque m est positif, alors $6m\,\mathrm{e}^{-x}$ l'est aussi et $1 + m\,\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 > 0$, donc finalement $g_m(x) > 0$ quel que soit le réel x. La fonction h_m définie par $h_m(x) = \dfrac{1}{g_m(x)}$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

Or $h_m(x) = \dfrac{1}{g_m(x)} = \dfrac{1 + 6m\,\mathrm{e}^{-x}}{6} = \dfrac{1}{6} + m\,\mathrm{e}^{-x}$ et on reconnait une solution de l'équation différentielle de la question **2.**.

On a ensuite vu à la question **3. a.** que si la fonction h_m était une solution de $y' = -y + \dfrac{1}{6}$, alors g_m était elle solution de l'équation $y' = y - \dfrac{1}{6}y^2$.

Exercice 4 — 5 points

1. On considère le script écrit en langage Python ci-dessous.

```
def seuil(S) :
  n=0
  u=7
  while u < S :
      n=n+1
      u=1.05*u+3
  return(n)
```

Affirmation 1 : l'instruction `seuil(100)` renvoie la valeur 18. **Vraie**

En partant de 7 l'algorithme multiplie le nombre précédent par 1,05 et ajoute 3.

On peut simuler ceci avec une simple calculatrice et on obtient en arrondissant au centième :

n	0	1	2	$\cdots$	17	18
u	7	10,35	13,87	$\cdots$	93,57	101,24

10,35 est le premier résultat et 101,24 le 18$^{\text{e}}$ l'algorithme s'arrête au 19$^{\text{e}}$ passage.

2. Soit (S_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$S_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{5^n}.$$

Affirmation 2 : la suite (S_n) converge vers $\frac{5}{4}$.**Vraie**

On a la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{5}$.

En écrivant sous la somme S la somme $\frac{1}{5}S$ décalée d'un rang vers la droite et en calculant la différence des deux lignes, on obtient :

$S - \frac{1}{5}S = 1 - \frac{1}{5^{n+1}} \iff \frac{4}{5}S = 1 - \frac{1}{5^{n+1}} \iff S = \frac{5}{4}\left[1 - \frac{1}{5^{n+1}}\right]$.

Comme $-1 < \frac{1}{5} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{5^{n+1}} = 1$ et enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} S = \frac{5}{4} = 1{,}25$.

3. **Affirmation 3** : dans une classe composée de 30 élèves, on peut former 870 binômes de délégués différents. **Fausse**

Le nombre de binômes différents est $\binom{30}{2} = \frac{30\times 29}{2} = 435$.

4. On considère la fonction f définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x(\ln x)^2$.

Affirmation 4 : **Vraie** l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique dans l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $[1\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :

$f'(x) = (\ln x)^2 + x \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = (\ln x)^2 + 2\ln x = \ln x\,(\ln x + 2)$.

On sait que la fonction logarithme népérien est croissante et comme $\ln 1 = 0$ et $\ln 1 + 2 > 0$, $f'(x) \geqslant 0$.

La fonction est donc croissante de $f(1) = 0$ à plus l'infini : d'après le théorème des valeurs intermédiaires f ne peut prendre la valeur 1 qu'une seule fois.

5. **Affirmation 5** : **Vraie**

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}}.$$

Les fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ étant dérivables sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0\,;\,1]$, on fait une intégration par parties :

avec $u(x) = x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{-x}$, on obtient : $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\mathrm{e}^{-x}$, d'où :

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[x\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 + \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = \left[-\mathrm{e}^{-x}(1+x)\right]_0^1$$
$$= -2\,\mathrm{e}^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}}$$

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.