Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + NSI, veuillez visiter :
bac-maths-nsi.fr/annales-sujets-et-corriges

Corrigé du baccalauréat Métropole 20 mars 2023

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

Un technicien contrôle les machines équipant une grande entreprise. Toutes ces machines sont identiques.
On sait que :

- 20 % des machines sont sous garantie ;
- 0,2 % des machines sont à la fois défectueuses et sous garantie ;
- 8,2 % des machines sont défectueuses.

Le technicien teste une machine au hasard.
On considère les évènements suivants :

- G : « la machine est sous garantie » ;
- D : « la machine est défectueuse » ;
- $\overline{G}$ et $\overline{D}$ désignent respectivement les évènements contraires de G et D.

1. La probabilité $p_G(D)$ de l'évènement D sachant que G est réalisé est égale à :

a. 0,002 **b.** 0,01 **c.** 0,024 **d.** 0,2

20 % des machines sont sous garantie donc $p(G) = 0{,}2$.
0,2 % des machines sont à la fois défectueuses et sous garantie donc $p(G \cap D) = 0{,}002$.
$p_G(D) = \dfrac{p(G \cap D)}{p(G)} = \dfrac{0{,}002}{0{,}2} = 0{,}01$ **Réponse b.**

2. La probabilité $p\left(\overline{G} \cap D\right)$ est égale à :

a. 0,01 b. 0,08 **c.** 0,1 **d.** 0,21

8,2 % des machines sont défectueuses donc $p(D) = 0{,}082$.
D'après la formule des probabilités totales : $p(D) = p(G \cap D) + p\left(\overline{G} \cap D\right)$. Donc :
$p\left(\overline{G} \cap D\right) = p(D) - p(G \cap D) = 0{,}082 - 0{,}002 = 0{,}08$ **Réponse b.**

3. La machine est défectueuse. La probabilité qu'elle soit sous garantie est environ égale, à 10^{-3} près, à :

a. 0,01 **b.** 0,024 **c.** 0,082 **d.** 0,1

On cherche : $p_D(G) = \dfrac{p(G \cap D)}{p(D)} = \dfrac{0{,}002}{0{,}082} \approx 0{,}024$ **Réponse b.**

Pour les questions 4 et 5, on choisit au hasard et de façon indépendante n machines de l'entreprise, où n désigne un entier naturel non nul.
On assimile ce choix à un tirage avec remise, et on désigne par X la variable aléatoire qui associe à chaque lot de n machines le nombre de machines défectueuses dans ce lot.
On admet que X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}082$.

4. Dans cette question, on prend $n = 50$.
La valeur de la probabilité $p(X > 2)$, arrondie au millième, est de :

a. 0,136 **b.** 0,789 **c.** 0,864 d. 0,924

$p(X > 2) = 1 - p(X \leqslant 2) \approx 1 - 0{,}2114 \approx 0{,}789$ **Réponse b.**

5. On considère un entier n pour lequel la probabilité que toutes les machines d'un lot de taille n fonctionnent correctement est supérieure à 0,4.
La plus grande valeur possible pour n est égale à :

a. 5 **b.** 6 **c.** 10 d. 11

Si toutes les machines fonctionnent, le nombre de machines défectueuses est 0 ; donc on cherche le plus grand n tel que $p(X = 0) > 0{,}4$.
$p(X = 0) = \binom{10}{0} \times 0{,}082^0 \times (1 - 0{,}082)^n = 0{,}918^n$
$p(X = 0) > 0{,}4 \iff 0{,}918^n > 0{,}4 \iff \ln(0{,}918^n) > \ln(0{,}4)$
$\iff n \times \ln(0{,}918) > \ln(0{,}4) \iff n < \dfrac{\ln(0{,}4)}{\ln(0{,}918)}$
$\dfrac{\ln(0{,}4)}{\ln(0{,}918)} \approx 10{,}71$ donc le plus grand entier n inférieur à $\dfrac{\ln(0{,}4)}{\ln(0{,}918)}$ est 10. **Réponse c.**

EXERCICE 2 **5 points**

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 8\ln(x)$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On admet que f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, on note f' sa fonction dérivée.

1. On détermine $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty\end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2 - 8\ln(x) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$

2. On admet que, pour tout $x > 0$, $f(x) = x^2\left(1 - 8\dfrac{\ln(x)}{x^2}\right)$.
$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0\end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x^2}\right) = 1$
$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x^2}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty\end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x^2}\right) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3. Calcul de la dérivée sur $]0\,;\,+\infty[$:
$f'(x) = 2x - 8 \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2 - 8}{x} = \dfrac{2\left(x^2 - 4\right)}{x} = \dfrac{2(x-2)(x+2)}{x}$

4. Pour étudier les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$, on cherche le signe de $f'(x)$.

x	0		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$+$		$+$	
x	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

$f(2) = 4 - 8\ln(2)$ On en déduit le tableau des variations de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.

x	0		2		$+\infty$
Signe de f'	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	↘	$4-8\ln(2)$	↗	$+\infty$

5. $4-8\ln(2) \approx -1{,}55 < 0$ donc on complète le tableau de variations.

x	0		α		2		$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	↘	0	↘	$4-8\ln(2)$	↗	$+\infty$

La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ donc continue sur cet intervalle, donc continue sur $]0\,;\,2[$. Sur l'intervalle $]0\,;\,2[$, la fonction f est continue et strictement décroissante ; elle passe d'une valeur positive à une valeur négative donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique dans $]0\,;\,2[$. On l'appelle α.

6. On admet que, sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique β. On complète le tableau de variations de f et on en déduit le signe de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

x	0		α		2		β		$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	↘	0	↘	$4-8\ln(2)$	↗	0	↗	$+\infty$
Signe de f	‖	$+$	0	$-$			0	$+$	

7. Pour tout réel k, on considère la fonction g_k définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $g_k(x) = x^2 - 8\ln(x) + k$; donc $g_k(x) = f(x) + k$.

La fonction g_k a donc les mêmes variations que f et elle a donc pour minimum sur $]0\,,\,+\infty[$ le nombre $4-8\ln(2)+k$. Pour que g_k soit positive ou nulle, il faut que ce minimum soit positif ou nul, donc $4-8\ln(2)+k \geqslant 0$ soit $k \geqslant 8\ln(2)-4$.

Donc $8\ln(2)-4$ est la plus petite valeur de k telle que $g_k \geqslant 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

EXERCICE 3 — 5 points

Une entreprise a créé une Foire Aux Questions (« FAQ ») sur son site internet.
On étudie le nombre de questions qui y sont posées chaque mois.

Partie A : Première modélisation

Dans cette partie, on admet que, chaque mois :

- 90 % des questions déjà posées le mois précédent sont conservées sur la FAQ ;
- 130 nouvelles questions sont ajoutées à la FAQ.

Au cours du premier mois, 300 questions ont été posées.
Pour estimer le nombre de questions, en centaines, présentes sur la FAQ le n-ième mois, on modélise la situation ci-dessus à l'aide de la suite (u_n) définie par : $u_1 = 3$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 1{,}3$.

1. $u_2 = 0{,}9 \times u_1 + 1{,}3 = 0{,}9 \times 3 + 1{,}3 = 4$ et $u_3 = 0{,}9 \times u_2 + 1{,}3 = 0{,}9 \times 4 + 1{,}3 = 4{,}9$
On peut estimer à 400 le nombre de questions le 2e mois, et à 490 le 3e mois.

2. On va montrer par récurrence la propriété $u_n = 13 - \dfrac{100}{9} \times 0{,}9^n$ pour tout $n \geqslant 1$.

- **Initialisation**
  Pour $n = 1$, on a $u_1 = 3$ et $13 - \dfrac{100}{9} \times 0{,}9^1 = 13 - \dfrac{90}{9} = 3$.
  La propriété est vérifiée au rang 1.
- **Hérédité**
  On suppose la propriété vraie au rang n avec $n \geqslant 1$; autrement dit $u_n = 13 - \dfrac{100}{9} \times 0{,}9^n$; c'est l'hypothèse de récurrence.
  $$u_{n+1} = 0{,}9u_n + 1{,}3 = 0{,}9\left(13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^n\right) + 1{,}3 = 0{,}9 \times 13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^{n+1} + 0{,}1 \times 13$$
  $$= 13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^{n+1}$$
  Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion**
  La propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 1$; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Donc pour tout $n \geqslant 1$, on a : $u_n = 13 - \dfrac{100}{9} \times 0{,}9^n$.

3. Pour tout $n \geqslant 1$, on a :
$$u_{n+1} - u_n = \left(13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^{n+1}\right) - \left(13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^n\right) = 13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^{n+1} - 13 + \frac{100}{9} \times 0{,}9^n$$
$$= \frac{100}{9} \times 0{,}9^n (1 - 0{,}9) = \frac{100}{9} \times 0{,}9^n \times 0{,}1 > 0$$
donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}*}$ est croissante.

4. On considère le programme ci-contre, écrit en langage Python.
Ce programme renvoie la plus petite valeur n telle que $u_n >$ p ; donc `seuil(8.5)` renvoie la plus petite valeur n telle que $u_n > 8{,}5$. On résout cette inéquation.

```
def seuil(p) :
    n=1
    u=3
    while u<=p :
        n=n+1
        u=0.9*u+1.3
    return n
```

$$u_n > 8{,}5 \iff 13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^n > 8{,}5 \iff 4{,}5 > \frac{100}{9} \times 0{,}9^n$$
$$\iff \frac{4{,}5 \times 9}{100} > 0{,}9^n \iff \ln(0{,}405) > \ln(0{,}9^n)$$
$$\iff \ln(0{,}405) > n \times \ln(0{,}9) \iff \frac{\ln(0{,}405)}{\ln(0{,}9)} < n$$
$\dfrac{\ln(0{,}405)}{\ln(0{,}9)} \approx 8{,}6$ donc la valeur renvoyée par `seuil(8.5)` est 9.

Partie B : Une autre modélisation

Dans cette partie, on considère une seconde modélisation à l'aide d'une nouvelle suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par : $v_n = 9 - 6 \times \mathrm{e}^{-0{,}19 \times (n-1)}$.
Le terme v_n est une estimation du nombre de questions, en centaines, présentes le n-ième mois sur la FAQ.

1. $v_1 = 9 - 6\mathrm{e}^0 = 3$ et $v_2 = 9 - 6\mathrm{e}^{-0{,}19} \approx 4{,}04$

2. On résout l'inéquation $v_n > 8{,}5$.

$v_n > 8{,}5 \iff 9 - 6 \times \mathrm{e}^{-0{,}19\times(n-1)} > 8{,}5 \iff 0{,}5 > 6 \times \mathrm{e}^{-0{,}19\times(n-1)}$

$\iff \dfrac{0{,}5}{6} > \mathrm{e}^{-0{,}19\times(n-1)}$ et par croissance de la fonction logarithme népérien

$\iff \ln\left(\dfrac{0{,}5}{6}\right) > -0{,}19 \times (n-1) \iff -\dfrac{\ln\left(\frac{0{,}5}{6}\right)}{0{,}19} < n-1 \iff n > 1 - \dfrac{\ln\left(\frac{0{,}5}{6}\right)}{0{,}19}$

Or $-\dfrac{\ln\left(\frac{0{,}5}{6}\right)}{0{,}19} \approx -13{,}08$ et $1 + 13{,}08 = 14{,}08$ donc la plus petite valeur telle que $v_n > 8{,}5$ est $n = 15$.

Partie C : Comparaison des deux modèles

1. L'entreprise considère qu'elle doit modifier la présentation de son site lorsque plus de 850 questions sont présentes sur la FAQ.

- Selon le 1er modèle, il y a plus de 850 questions sur la FAQ quand $u_n > 8{,}5$, c'est-à-dire le 9e mois.
- Selon le 2e modèle, il y a plus de 850 questions sur la FAQ quand $v_n > 8{,}5$, c'est-à-dire le 15e mois.

C'est la première modélisation qui conduit à procéder le plus tôt à cette modification.

2. Pour savoir pour quelle modélisation il y a le plus grand nombre de questions sur la FAQ à long terme, on cherche les limites des suites (u_n) et (v_n).

- $u_n = 13 - \dfrac{100}{9} \times 0{,}9^n$

  $-1 < 0{,}9 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}9^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 13$.

  À long terme il y aura 1 300 questions pour la 1e modélisation..
- $v_n = 9 - 6 \times \mathrm{e}^{-0{,}19\times(n-1)}$

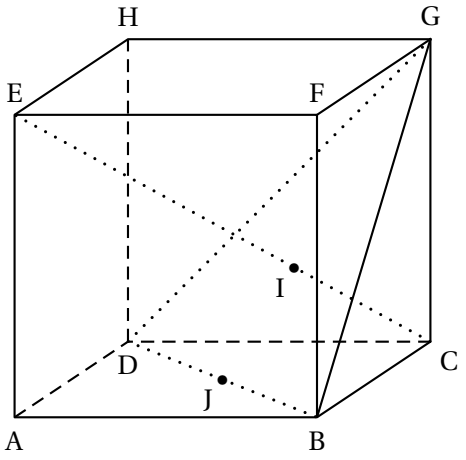
  $\lim\limits_{n\to+\infty} -0{,}19 \times (n-1) = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}19\times(n-1)} = 0$; on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 9$.

  À long terme il y aura 900 questions pour la 2e modélisation..

C'est donc pour la 1re modélisation qu'il y aura le plus de questions à long terme.

EXERCICE 4 **5 points**

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1.
On appelle I le point d'intersection du plan (GBD) avec la droite (EC).
L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}},\,\overrightarrow{\mathrm{AD}},\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.



1. On a : $\mathrm{E}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\mathrm{C}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\mathrm{G}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

2. La droite (EC) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\text{EC}}\begin{pmatrix}1-0\\1-0\\0-1\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Donc la droite (EC) a pour représentation paramétrique ;

$$\begin{cases} x = x_{\text{E}} + 1\times t \\ y = y_{\text{E}} + 1\times t \\ z = z_{\text{E}} + (-1)\times t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1-t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

3. Les points G, B et D ne sont pas alignés donc (GDB) est un plan de vecteurs directeurs $\overrightarrow{\text{GB}}$ et $\overrightarrow{\text{BD}}$.

$\overrightarrow{\text{GB}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1-1\\0-1\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{BD}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0-1\\1-0\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{\text{EC}}.\overrightarrow{\text{GB}} = 1\times 0 + 1\times(-1) + (-1)\times(-1) = 0-1+1 = 0$ donc $\overrightarrow{\text{EC}} \perp \overrightarrow{\text{GB}}$

$\overrightarrow{\text{EC}}.\overrightarrow{\text{BD}} = 1\times(-1) + 1\times 1 + (-1)\times 0 = -1+1+0 = 0$ donc $\overrightarrow{\text{EC}} \perp \overrightarrow{\text{BD}}$

Le vecteur $\overrightarrow{\text{EC}}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (GDB) donc la droite (EC) est orthogonale au plan (GDB).

4. **a.** La droite (EC) est orthogonale au plan (GDB) donc tout vecteur directeur de la droite (EC) est un vecteur normal au plan (GDB), en particulier le vecteur $\overrightarrow{\text{EC}}$ de coordonnées $(1\,;\,1\,;\,-1)$. Donc le plan (GDB) a une équation de la forme $x+y-z+d=0$ où d est un réel à déterminer.

Le point B appartient au plan (GDB) donc $x_{\text{B}}+y_{\text{B}}-z_{\text{B}}+d=0$; autrement dit : $1+0-0+d=0$ donc $d=-1$.

Le plan (GDB) a donc pour équation : $x+y-z-1=0$.

b. On appelle I le point d'intersection du plan (GBD) avec la droite (EC).

Donc les coordonnées de I sont solutions du système : $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1-t \\ x+y-z-1 = 0 \end{cases}$

On a donc : $t+t-(1-t)-1=0$ donc $t=\dfrac{2}{3}$.

On en déduit les coordonnées de I : $x_{\text{I}} = t = \dfrac{2}{3}$, $y_{\text{I}} = t = \dfrac{2}{3}$ et $z_{\text{I}} = 1-t = \dfrac{1}{3}$, soit $\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$.

c. La droite (EC) est orthogonale au plan (GDB) donc la distance du point E au plan (GDB) est la longueur EI.

$\text{EI}^2 = \left(\dfrac{2}{3}-0\right)^2 + \left(\dfrac{2}{3}-0\right)^2 + \left(\dfrac{1}{3}-1\right)^2 = \dfrac{4}{9}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{4}{9} = \dfrac{12}{9}$; donc $\text{EI} = \sqrt{\dfrac{12}{9}} = \dfrac{\sqrt{12}}{3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

La distance du point I au plan (GDB) est donc de $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

5. **a.** Les côtés [BD], [DG] et [GB] du triangle BDG sont les diagonales respectives des carrés ABCD, CDHG et BCGF qui sont superposables ; donc leurs diagonales ont la même longueur. Ce qui veut dire que le triangle BDG est équilatéral.

b. On appelle J le milieu du segment [BD] ; donc le segment [GJ] est la médiane issue de G dans le triangle BDG. Or ce triangle est équilatéral donc [GJ] est la hauteur issue de G dans ce triangle. L'aire du triangle BDG est donc : $\mathscr{A} = \dfrac{\text{BD}\times\text{GJ}}{2}$.

B $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et D $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ donc J $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$

$\text{GJ}^2 = \left(\dfrac{1}{2}-1\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}-1\right)^2 + (0-1)^2 = \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+1 = \dfrac{6}{4}$ donc $\text{GJ} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

[BD] est la diagonale du carré ABCD de côté 1 donc BD = $\sqrt{2}$.

L'aire de BDG est donc : $\mathscr{A} = \dfrac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{12}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

6. Le volume du tétraèdre EGBD est : $\dfrac{1}{3}(\mathscr{A} \times \text{EI}) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.