Bac Général Maths + NSI (Mathématiques et Numérique et sciences informatiques)

# SUJET D'EXAMEN (SESSION OFFICIELLE)

Mathématiques - Session 2023

Sujet de l'examen national tel que publié pour la session indiquée. Source : sujets nationaux publiés par le ministère chargé de l'examen et les services académiques. Document mis à disposition par FormaV pour la révision.

Toutes les annales et leurs corrigés : https://bac-maths-nsi.fr/annales-sujets-et-corriges

# Baccalauréat Centres étrangers [1] 22 mars 2023

## Sujet 2

## ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

**EXERCICE 1** **5 points**

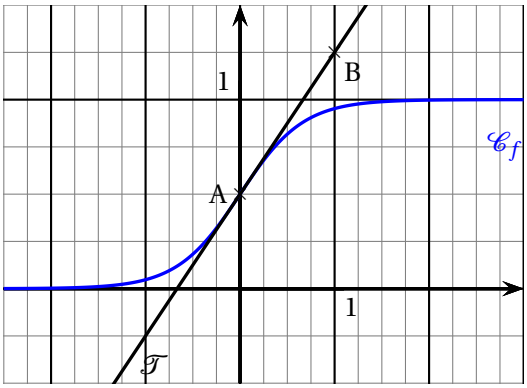
On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-3x}}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On nomme A le point de coordonnées $\left(0\,;\,\frac{1}{2}\right)$ et B le point de coordonnées $\left(1\,;\,\frac{5}{4}\right)$.

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.




**Partie A : lectures graphiques**

Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$.
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction $f$ semble convexe ou concave.

**Partie B : étude de la fonction**

1. On admet que la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer l'expression de sa fonction dérivée $f'$.
2. Justifier que la fonction $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. **a.** Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $f$.
   **b.** Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction $f$.
4. Déterminer la valeur exacte de la solution $\alpha$ de l'équation $f(x) = 0,99$.

**Partie C : Tangente et convexité**

1. Europe

**1.** Déterminer par le calcul une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

On admet que la fonction $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note $f''$ la fonction dérivée seconde de la fonction $f$.

On admet que $f''$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f''(x) = \frac{9\mathrm{e}^{-3x}\left(\mathrm{e}^{-3x}-1\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^3}.$$

**2.** Étudier le signe de la fonction $f''$ sur $\mathbb{R}$.

**3.** **a.** Indiquer, en justifiant, sur quel(s) intervalle(s) la fonction $f$ est convexe.

**b.** Que représente le point A pour la courbe $\mathscr{C}_f$ ?

**c.** En déduire la position relative de la tangente $\mathscr{T}$ et de la courbe $\mathscr{C}_f$.
Justifier la réponse.

## EXERCICE 2 — 5 points

### Partie A

On considère la fonction $f$ définie par :

$$f(x) = x - \ln(1+x).$$

**1.** Justifier que la fonction $f$ est définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.

**2.** On admet que la fonction $f$ est dérivable sur $]-1\,;\,+\infty[$.
Déterminer l'expression de sa fonction dérivée $f'(x)$.

**3.** **a.** En déduire le sens de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.

**b.** En déduire le signe de la fonction $f$ sur l'intervalle $]-1\,;\,0[$.

**4.** **a.** Montrer que, pour tout $x$ appartenant à l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$, on a :
$f(x) = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}\right)$.

**b.** En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction $f$.

### Partie B

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel $n$,

$$u_{n+1} = u_n - \ln(1+u_n).$$

On admet que la suite $(u_n)$ est bien définie.

**1.** Donner la valeur arrondie au millième de $u_1$.

**2.** En utilisant la question 3. a. de la partie A, démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a $u_n \geqslant 0$.

**3.** Démontrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.

**4.** Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)$ converge.

**5.** Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

**EXERCICE 3** **5 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.
On considère les points

$$A(3\,;\,0\,;\,1), \qquad B(2\,;\,1\,;\,2) \quad \text{et} \quad C(-2\,;\,-5\,;\,1).$$

**1.** Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

**2.** Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

**3.** Vérifier que le plan (ABC) a pour équation cartésienne :

$$-x+y-2z+5=0.$$

**4.** On considère le point S$(1\,;\,-2\,;\,4)$.

Déterminer la représentation paramétrique de la droite $(\Delta)$, passant par S et orthogonale au plan (ABC).

**5.** On appelle H le point d'intersection de la droite $(\Delta)$ et du plan (ABC).

Montrer que les coordonnées de H sont $(0\,;\,-1\,;\,2)$.

**6.** Calculer la valeur exacte de la distance SH.

**7.** On considère le cercle $\mathscr{C}$, inclus dans le plan (ABC), de centre H, passant par le point B. On appelle $\mathscr{D}$ le disque délimité par le cercle $\mathscr{C}$.

Déterminer la valeur exacte de l'aire du disque $\mathscr{D}$.

**8.** En déduire la valeur exacte du volume du cône de sommet S et de base le disque $\mathscr{D}$.

**EXERCICE 4** **5 points**

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.*
*Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.*
*Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.*
*Aucune justification n'est demandée.*
*Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.*
*Les cinq questions sont indépendantes.*

Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 4 % des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses.
On choisit au hasard $n$ pièces produites par la chaîne de fabrication.
Le nombre de pièces produites est suffisamment grand pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.
On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses tirées.
Dans les trois questions suivantes, on prend $n=50$.

**1.** Quelle est la probabilité, arrondie au millième, de tirer au moins une pièce défectueuse ?

**a.** 1 **b.** 0,870 **c.** 0,600 **d.** 0,599

**2.** La probabilité $p(3<X\leqslant 7)$ est égale à :

**a.** $p(X \leqslant 7) - p(X > 3)$ **b.** $p(X \leqslant 7) - p(X \leqslant 3)$

**c.** $p(X < 7) - p(X > 3)$ **d.** $p(X < 7) - p(X \geqslant 3)$

**3.** Quel est le plus petit entier naturel $k$ tel que la probabilité de tirer au plus $k$ pièces défectueuses soit supérieure ou égale à 95 % ?

**a.** 2 **b.** 3 **c.** 4 **d.** 5

Dans les questions suivantes, $n$ ne vaut plus nécessairement 50.

**4.** Quelle est la probabilité de ne tirer que des pièces défectueuses ?

**a.** $0,04^n$ **b.** $0,96^n$ **c.** $1-0,04^n$ **d.** $1-0,96^n$

**5.** On considère la fonction Python ci-dessous. Que renvoie-t-elle ?

```
def seuil (x) :
    n=1
    while 1-0.96**n < x :
      n = n + 1
    return n
```

**a.** Le plus petit nombre $n$ tel que la probabilité de tirer au moins une pièce défectueuse soit supérieure ou égale à x.

**b.** Le plus petit nombre $n$ tel que la probabilité de ne tirer aucune pièce défectueuse soit supérieure ou égale à x.

**c.** Le plus grand nombre $n$ tel que la probabilité de ne tirer que des pièces défectueuses soit supérieure ou égale à x.

**d.** Le plus grand nombre $n$ tel que la probabilité de ne tirer aucune pièce défectueuse soit supérieure ou égale à x.