Bac Général Maths + NSI (Mathématiques et Numérique et sciences informatiques)

# SUJET D'EXAMEN (SESSION OFFICIELLE)

Mathématiques - Session 2023

Sujet de l'examen national tel que publié pour la session indiquée. Source : sujets nationaux publiés par le ministère chargé de l'examen et les services académiques. Document mis à disposition par FormaV pour la révision.

Toutes les annales et leurs corrigés : https://bac-maths-nsi.fr/annales-sujets-et-corriges

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

**SESSION 2023**

# MATHÉMATIQUES

# JOUR 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

*L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.*
*L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.*

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

*Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*
*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.*

**Exercice 1 (4 points)**

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.*

*Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*

**1.** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,e^{x^2-3}$.
Une des primitives $F$ de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$ est définie par :

**a.** $F(x) = 2x\,e^{x^2-3}$ ; **b.** $F(x) = (2x^2+1)\,e^{x^2-3}$ ; **c.** $F(x) = \frac{1}{2}x\,e^{x^2-3}$ ; **d.** $F(x) = \frac{1}{2}\,e^{x^2-3}$.

**2.** On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par : $u_n = e^{2n+1}$.
La suite $(u_n)$ est :

**a.** arithmétique de raison 2 ;
**b.** géométrique de raison e;
**c.** géométrique de raison $e^2$ ;
**d.** convergente vers e.

Pour les questions **3.** et **4.**, on considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :
$u_0 = 15$ et pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1} = 1{,}2u_n + 12$ .

**3.** La fonction Python suivante, dont la ligne 4 est incomplète, doit renvoyer la plus petite valeur de l'entier $n$ telle que $u_n > 10\,000$.

```
def seuil() :
      n=0
      u=15
      while …:
         n=n+1
         u=1.2*u+12
      return(n)
```

À la ligne 4, on complète par :

**a.** u<=10 000 ; **b.** u = 10 000 ; **c.** u > 10 000 ; **d.** n<= 10 000.

**4.** On considère la suite $(v_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n + 60$. La suite $(v_n)$ est :

**a.** une suite décroissante ;
**b.** une suite géométrique de raison 1,2 ;
**c.** une suite arithmétique de raison 60 ;
**d.** une suite ni géométrique ni arithmétique.

**Exercice 2 (5 points)**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

On considère les points $A(1\,;0\,;-1)$, $B(3\,;-1\,;2)$, $C(2\,;-2\,;-1)$ et $D(4\,;-1\,;-2)$.

On note $\Delta$ la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2+t \\ z = -1+t \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

**1.** **a.** Montrer que les points $A, B$ et $C$ définissent un plan que l'on notera $\mathcal{P}$ .

**b.** Montrer que la droite $(CD)$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$. Sur le plan $\mathcal{P}$, que représente le point $C$ par rapport à $D$ ?

**c.** Montrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est : $2x + y - z - 3 = 0$ .

**2.** **a.** Calculer la distance $CD$.

**b.** Existe-t-il un point $M$ du plan $\mathcal{P}$ différent de $C$ vérifiant $MD = \sqrt{6}$ ? Justifier la réponse.

**3.** **a.** Montrer que la droite $\Delta$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

Soit $H$ le projeté orthogonal du point $D$ sur la droite $\Delta$ .

**b.** Montrer que $H$ est le point de $\Delta$ associé à la valeur $t = -2$ dans la représentation paramétrique de $\Delta$ donnée ci-dessus.

**c.** En déduire la distance du point $D$ à la droite $\Delta$ .

**Exercice 3 (4 points)**

*Les parties **A** et **B** sont indépendantes.*
*Les probabilités demandées seront données à* $10^{-3}$ *près.*

Pour aider à la détection de certaines allergies, on peut procéder à un test sanguin dont le résultat est soit positif, soit négatif.

Dans une population, ce test donne les résultats suivants :

- Si un individu est allergique, le test est positif dans 97 % des cas ;
- Si un individu n'est pas allergique, le test est négatif dans 95,7 % des cas.

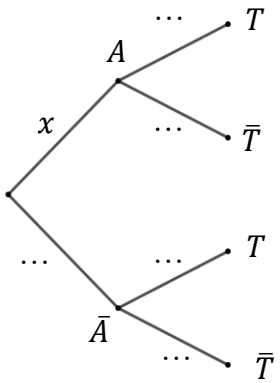
Par ailleurs, 20 % des individus de la population concernée présentent un test positif.

On choisit au hasard un individu dans la population, et on note :

- $A$ l'événement « l'individu est allergique » ;
- $T$ l'événement « l'individu présente un test positif ».

On notera $\bar{A}$ et $\bar{T}$ les événements contraires de $A$ et $T$.

On appelle par ailleurs $x$ la probabilité de l'événement $A$ : $x = p(A)$.




**Partie A**

**1.** Reproduire et compléter l'arbre ci-contre décrivant la situation, en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.

**2.** **a.** Démontrer l'égalité : $p(T) = 0{,}927x + 0{,}043$ .

**b.** En déduire la probabilité que l'individu choisi soit allergique.

**3.** Justifier par un calcul l'affirmation suivante :
« Si le test d'un individu choisi au hasard est positif, il y a plus de 80% de chances que cet individu soit allergique ».

**Partie B :**

On réalise une enquête sur les allergies dans une ville en interrogeant $150$ habitants choisis au hasard, et on admet que ce choix se ramène à des tirages successifs indépendants avec remise.
On sait que la probabilité qu'un habitant choisi au hasard dans cette ville soit allergique est égale à $0{,}08$.
On note $X$ la variable aléatoire qui à un échantillon de $150$ habitants choisis au hasard associe le nombre de personnes allergiques dans cet échantillon.

**1.** Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire $X$ ? Préciser ses paramètres.
**2.** Déterminer la probabilité que $20$ personnes exactement parmi les $150$ interrogées soient allergiques.
**3.** Déterminer la probabilité qu'au moins $10\%$ des personnes parmi les $150$ interrogées soient allergiques.

**Exercice 4 (7 points)**

**PARTIE A**

On définit sur l'intervalle $]0;+\infty[$ la fonction $g$ par : $g(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On admet que la fonction $g$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note $g'$ sa fonction dérivée.

**1.** Montrer que pour $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui du trinôme du second degré $(x^2 - 2x + 2)$.
**2.** En déduire que la fonction $g$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
**3.** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0{,}5\ ;\ 1]$, que l'on notera α.
**4.** On donne le tableau de signes de $g$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ :

| $x$ | 0 | | α | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ‖ | $-$ | 0 | $+$ | |

Justifier ce tableau de signes à l'aide des résultats obtenus aux questions précédentes.

**PARTIE B**

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = e^x \ln x$.
On note $C_f$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé.

**1.** On admet que la fonction $f$ est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ , on note $f'$ sa fonction dérivée, $f''$ sa fonction dérivée seconde et on admet que :
pour tout nombre réel $x > 0$, $f'(x) = e^x\,(\frac{1}{x} + \ln x)$ .

Démontrer que, pour tout nombre réel $x > 0$, on a : $f''(x) = e^x\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x\right)$.

**2.** On pourra remarquer que pour tout réel $x > 0$, $f''(x) = e^x \times g(x)$, où $g$ désigne la fonction étudiée dans la **partie A**.

**a**. Dresser le tableau de signes de la fonction $f''$ sur $]0;+\infty[$. Justifier.
**b.** Justifier que la courbe $C_f$ admet un unique point d'inflexion A.
**c.** Étudier la convexité de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$. Justifier.

**3.** **a.** Calculer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.
**b.** Montrer que $f'(\alpha) = \frac{e^\alpha}{\alpha^2}(1 - \alpha)$. On rappelle que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$.
**c.** Démontrer que $f'(\alpha) > 0$ et en déduire le signe de $f'(x)$ pour $x$ appartenant à $]0;+\infty[$.
**d.** En déduire le tableau de variations complet de la fonction $f$ sur $]0;+\infty[$.