Bac Général Maths + NSI (Mathématiques et Numérique et sciences informatiques)

SUJET D'EXAMEN (SESSION OFFICIELLE)

Mathématiques - Session 2022

Sujet de l'examen national tel que publié pour la session indiquée. Source : sujets nationaux publiés par le ministère chargé de l'examen et les services académiques. Document mis à disposition par FormaV pour la révision.

Toutes les annales et leurs corrigés : https://bac-maths-nsi.fr/annales-sujets-et-corriges

∽ Baccalauréat Polynésie 30 août 2022 ∾
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ sujet n° 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé

Le sujet propose 4 exercices
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

EXERCICE 1 7 points **probabilités**

Parmi les angines, un quart nécessite la prise d'antibiotiques, les autres non.
Afin d'éviter de prescrire inutilement des antibiotiques, les médecins disposent d'un test de diagnostic ayant les caractéristiques suivantes :

- lorsque l'angine nécessite la prise d'antibiotiques, le test est positif dans 90 % des cas ;
- lorsque l'angine ne nécessite pas la prise d'antibiotiques, le test est négatif dans 95 % des cas.

Les probabilités demandées dans la suite de l'exercice seront arrondies à 10^{-4} près si nécessaire.

Partie 1

Un patient atteint d'angine et ayant subi le test est choisi au hasard.
On considère les évènements suivants :

- A : « le patient est atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques » ;
- T : « le test est positif » ;
- $\overline{A}$ et $\overline{T}$ sont respectivement les évènements contraires de A et T.

1. Calculer $P(A \cap T)$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

2. Démontrer que $P(T) = 0{,}262\,5$.

3. On choisit un patient ayant un test positif. Calculer la probabilité qu'il soit atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques.

4. **a.** Parmi les évènements suivants, déterminer ceux qui correspondent à un résultat erroné du test : $A \cap T$, $\overline{A} \cap T$, $A \cap \overline{T}$, $\overline{A} \cap \overline{T}$.

b. On définit l'évènement E : « le test fournit un résultat erroné ».
Démontrer que $p(E) = 0{,}062\,5$.

Partie 2

On sélectionne au hasard un échantillon de n patients qui ont été testés.
On admet que l'on peut assimiler ce choix d'échantillon à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de patients de cet échantillon ayant un test erroné.

1. On suppose que $n = 50$.
   a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}062\,5$.
   b. Calculer $P(X = 7)$.
   c. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins un patient dans l'échantillon dont le test est erroné.
2. Quelle valeur minimale de la taille de l'échantillon faut-il choisir pour que $P(X \geqslant 10)$ soit supérieure à 0,95 ?

EXERCICE 2 7 points **suites, fonctions**

Soit k un nombre réel.
On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et pour tout entier naturel n,

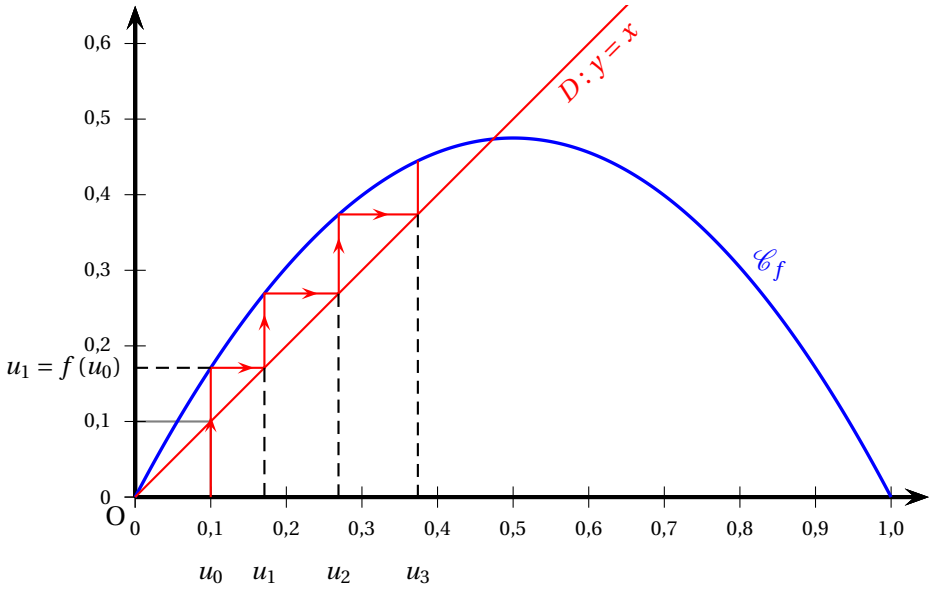
$$u_{n+1} = k u_n (1 - u_n).$$

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.
On y étudie deux cas de figure selon les valeurs de k.

Partie 1

Dans cette partie, $k = 1{,}9$ et $u_0 = 0{,}1$.
On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}9 u_n (1 - u_n)$.

1. On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = 1{,}9x(1 - x)$.
   a. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   b. En déduire que si $x \in [0\,;\,1]$ alors $f(x) \in [0\,;\,1]$.
2. Ci-dessous sont représentés les premiers termes de la suite (u_n) construits à partir de la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f et de la droite D d'équation $y = x$.
   Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite éventuelle.



3. **a.** En utilisant les résultats de la question 1, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}.$$

b. En déduire que la suite (u_n) converge.

c. Déterminer sa limite.

Partie 2

Dans cette partie, $k = \dfrac{1}{2}$ et $u_0 = \dfrac{1}{4}$.

On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n(1-u_n)$ et $u_0 = \dfrac{1}{4}$.

On admet que pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

1. Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

2. On considère la fonction Python `algo (p)` où `p` désigne un entier naturel non nul :

```
def algo(p) :
  u =1/4
  n = 0
  while u > 10**(-p):
    u = 1/2*u*(1 - u)
    n = n+1
   return(n)
```

Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel non nul `p`, la boucle while ne tourne pas indéfiniment, ce qui permet à la commande `algo (p)` de renvoyer une valeur.

EXERCICE 3 7 points **fonctions**

Partie 1

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{2\ln x}{x}.$$

1. On note g' la dérivée de g. Démontrer que pour tout réel x strictement positif :

$$g'(x) = \frac{2-2\ln x}{x^2}.$$

2. On dispose de ce tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$:

x	0	1	e	$+\infty$
Variations de g	$-\infty$	0	$\frac{2}{\text{e}}$	0

Justifier les informations suivantes lues dans ce tableau :

a. la valeur $\dfrac{2}{\text{e}}$;

b. les variations de la fonction g sur son ensemble de définition ;

c. les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.

3. En déduire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = [\ln(x)]^2.$$

Dans cette partie, chaque étude est effectuée sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

1. Démontrer que sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la fonction f est une primitive de la fonction g.

2. À l'aide de la partie 1, étudier :

a. la convexité de la fonction f ;

b. les variations de la fonction f.

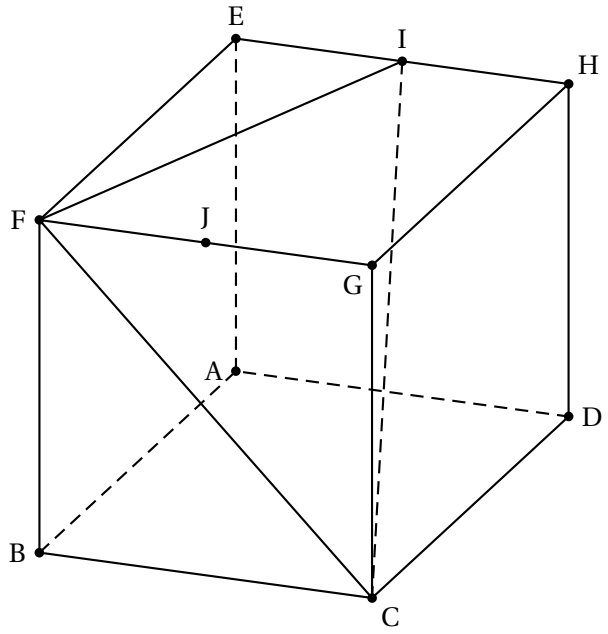
3. **a.** Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse e.

b. En déduire que, pour tout réel x dans $]0\,;\,\text{e}]$:

$$[\ln(x)]^2 \geqslant \frac{2}{\text{e}}x - 1.$$

EXERCICE 4 7 points **géométrie dans le plan et dans l'espace**

On considère le cube ABCDEFGH.
On note I le milieu du segment[EH] et on considère le triangle CFI.
L'espace est muni du repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AD}},\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$ et on admet que le point I a pour coordonnées $\left(0\,;\,\dfrac{1}{2};\,1\right)$ dans ce repère.



1. **a.** Donner sans justifier les coordonnées des points C, F et G.

b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (CFI).

c. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (CFI) est : $x+2y+2z-3=0$.

2. On note d la droite passant par G et orthogonale au plan (CFI).

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

b. Démontrer que le point $\text{K}\left(\frac{7}{9}\,;\,\frac{5}{9}\,;\,\frac{5}{9}\right)$ est le projeté orthogonal du point G sur le plan (CFI).

c. Déduire des questions précédentes que la distance du point G au plan (CFI) est égale à $\frac{2}{3}$.

3. On considère la pyramide GCFI.

On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule

$$V=\frac{1}{3}\times b\times h,$$

où b est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.

a. Démontrer que le volume de la pyramide GCFI est égal à $\frac{1}{6}$, exprimé en unité de volume.

b. En déduire l'aire du triangle CFI, en unité d'aire.