Bac Général Maths + NSI (Mathématiques et Numérique et sciences informatiques)

SUJET D'EXAMEN (SESSION OFFICIELLE)

Mathématiques - Session 2022

Sujet de l'examen national tel que publié pour la session indiquée. Source : sujets nationaux publiés par le ministère chargé de l'examen et les services académiques. Document mis à disposition par FormaV pour la révision.

Toutes les annales et leurs corrigés : https://bac-maths-nsi.fr/annales-sujets-et-corriges

∽ Baccalauréat Amérique du Nord Jour 2 19 mai 2022 ∾
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le sujet propose 4 exercices
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices**
Chaque exercice est noté sur **7 points (le total sera ramené sur 20 points)**.
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

EXERCICE 1 (7 points) **Thème : probabilités, suites**

Dans une région touristique, une société propose un service de location de vélos pour la journée.

La société dispose de deux points de location distinctes, le point A et le point B. Les vélos peuvent être empruntés et restitués indifféremment dans l'un où l'autre des deux points de location.

On admettra que le nombre total de vélos est constant et que tous les matins, à l'ouverture du service, chaque vélo se trouve au point A ou au point B.

D'après une étude statistique :

- Si un vélo se trouve au point A un matin, la probabilité qu'il se trouve au point A le matin suivant est égale à 0,84 ;
- Si un vélo se trouve au point B un matin la probabilité qu'il se trouve au point B le matin suivant est égale à 0,76.

À l'ouverture du service le premier matin, la société a disposé la moitié de ses vélos au point A, l'autre moitié au point B.

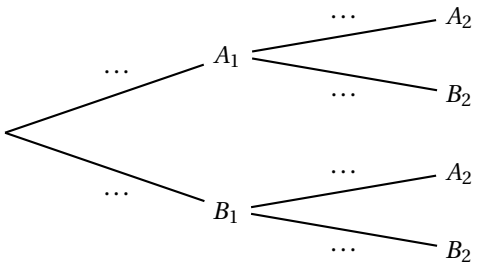
On considère un vélo de la société pris au hasard.

Pour tout entier naturel non nul n, on définit les évènements suivants :

- A_n : « le vélo se trouve au point A le n-ième matin »
- B_n : « le vélo se trouve au point B le n-ième matin ».

Pour tout entier naturel non nul n, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n et b_n la probabilité de l'évènement B_n. Ainsi $a_1 = 0,5$ et $b_1 = 0,5$.

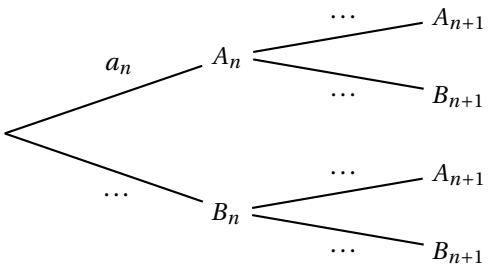
1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premiers matins :



2. **a.** Calculer a_2.

b. Le vélo se trouve au point A le deuxième matin. Calculer la probabilité qu'il se soit trouvé au point B le premier matin. La probabilité sera arrondie au millième.

3. **a.** Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $n+1$-ième matins.



b. Justifier que pour tout entier naturel non nul n, $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,24$.

4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.

5. Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

6. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n \geqslant 0,599$ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 2 (7 points) **Thème : fonctions, fonction exponentielle**

Partie A

Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3 ; 4]$ par :

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$$

1. Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3 ; 4]$.

2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-3 ; 4]$ une unique solution qui sera notée α.

3. Déterminer une valeur approchée du réel α au dixième près.

4. Donner le tableau de signes de la fonction p sur l'intervalle $[-3 ; 4]$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3 ; 4]$ par :

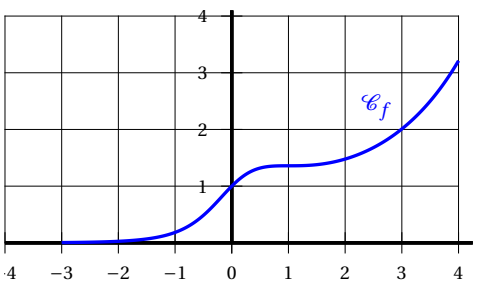
$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1 + x^2}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

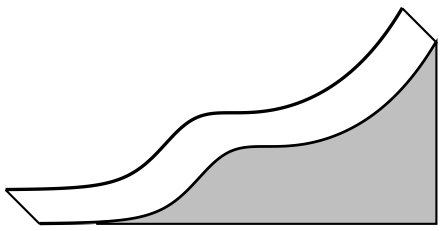
1. **a.** Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-3 ; 4]$.

b. Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe $\mathscr{C}_f$ comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



Représentation de la courbe $\mathscr{C}_f$



Vue de profil du toboggan

a. D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Argumenter.

b. On admet que la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, a pour expression pour tout réel x de l'intervalle $[-3\,;\,4]$:

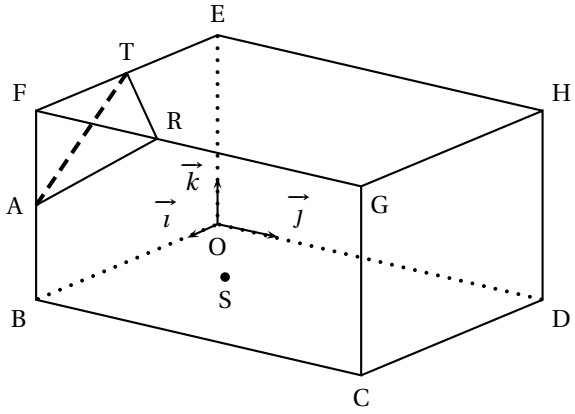
$$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)\mathrm{e}^x}{\left(1+x^2\right)^3}$$

où p est la fonction définie dans la partie A.

En utilisant l'expression précédente de f'', répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ? ». Justifier.

EXERCICE 3 (7 points) **Thème : géométrie dans l'espace**

Une exposition d'art contemporain a lieu dans une salle en forme de pavé droit de largeur 6 m, de longueur 8 m et de hauteur 4 m.
Elle est représentée par le parallélépipède rectangle OBCDEFGH où OB = 6 m, OD = 8 m et OE = 4 m.
On utilise le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$ tel que $\vec{\imath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{8}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ et $\vec{k} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OE}}$.



Dans ce repère on a, en particulier C(6 ; 8 ; 0), F(6 ; 0 ; 4) et G(6 ; 8 ; 4).
Une des œuvres exposées est un triangle de verre représenté par le triangle ART qui a pour sommets A(6 ; 0 ; 2), R(6 ; 3 ; 4) et T(3 ; 0 ; 4), Enfin, S est le point de coordonnées $\left(3\,;\,\frac{5}{2}\,;\,0\right)$.

1. **a.** Vérifier que le triangle ART est isocèle en A.

b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{AR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AT}}$.

c. En déduire une valeur approchée à 0,1 degré près de l'angle $\widehat{\mathrm{RAT}}$.

2. **a.** Justifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ART).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (ART).

3. Un rayon laser dirigé vers le triangle ART est émis du plancher à partir du point S. On admet que ce rayon est orthogonal au plan (ART).

a. Soit Δ la droite orthogonale au plan (ART) et passant par le point S.

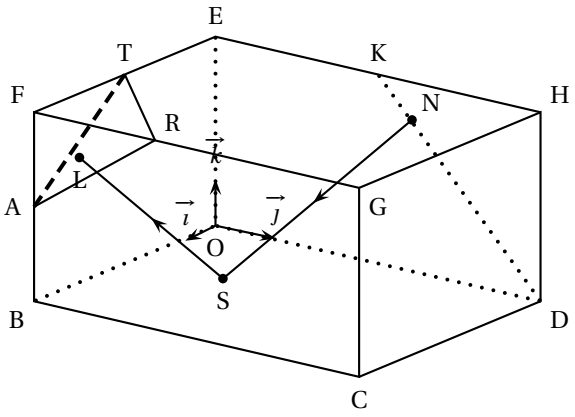
Justifier que le système ci-dessous est une représentation paramétrique de la droite Δ :

$$\begin{cases} x &= 3+2k \\ y &= \dfrac{5}{2}-2k \\ z &= 3k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

b. Soit L le point d'intersection de la droite Δ, avec le plan (ART).

Démontrer que L a pour coordonnées $\left(5\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,3\right)$.

4. L'artiste installe un rail représenté par le segment [DK] ou K est le milieu du segment [EH]. Sur ce rail, il positionne une source lumineuse laser en un point N du segment [DK] et il oriente ce second rayon laser vers le point S.



a. Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;1]$, le point N de coordonnées $(0\,;\,8-4t\,;\,4t)$ est un point du segment [DK].

b. Calculer les coordonnées exactes du point N tel que les deux rayons laser représentés par les segments [SL] et [SN] soient perpendiculaires.

EXERCICE 4 (7 points) **Thème : fonction logarithme népérien, probabilités**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM) qui comprend six questions. Les six questions sont indépendantes. Pour chacune des questions, ***une seule des quatre réponses est exacte****. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée.*
Une réponse fausse, une réponse multiple ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point

Question 1

Le réel a est définie par $a = \ln(9) + \ln\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) + \ln\left(\dfrac{1}{9}\right)$ est égal à :

a. $1-\dfrac{1}{2}\ln(3)$ **b.** $\dfrac{1}{2}\ln(3)$ **c.** $3\ln(3)+\dfrac{1}{2}$ **d.** $-\dfrac{1}{2}\ln(3)$

Question 2

On note (E) l'équation suivante $\ln x + \ln(x-10) = \ln 3 + \ln 7$ d'inconnue le réel x.

a. 3 est solution de (E).

b. $5-\sqrt{46}$ est solution de (E).
c. L'équation (E) admet une unique solution réelle.
d. L'équation (E) admet deux solutions réelles.

Question 3

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par l'expression $f(x)=x^2(-1+\ln x)$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

a. Pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)=2x+\dfrac{1}{x}$.
b. La fonction f est croissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
c. $f'\left(\sqrt{\text{e}}\right)$ est différent de 0.
d. La droite d'équation $y=-\dfrac{1}{2}\text{e}$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\sqrt{\text{e}}$.

Question 4

Un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 5 jetons du sac.
La probabilité de tirer exactement 2 jetons jaunes, arrondie au millième, est :

a. 0,683 **b.** 0,346 **c.** 0,230 **d.** 0,165

Question 5

Un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 5 jetons du sac.
La probabilité de tirer au moins un jeton jaune, arrondie au millième, est :

a. 0,078 **b.** 0,259 **c.** 0,337 **d.** 0,922

Question 6

Un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus.
On réalise l'expérience aléatoire suivante : on tire successivement et avec remise cinq jetons du sac.
On note le nombre de jetons jaunes obtenus après ces cinq tirages.
Si on répète cette expérience aléatoire un très grand nombre de fois alors, en moyenne, le nombre de jetons jaunes est égal à :

a. 0,4 **b.** 1,2 **c.** 2 **d.** 2,5