Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + NSI, veuillez visiter :
bac-maths-nsi.fr/annales-sujets-et-corriges

Corrigé Baccalauréat Amérique du Nord Jour 1 18 mai 2022

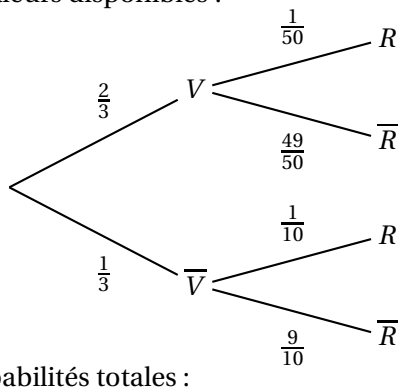
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le sujet propose 4 exercices
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

EXERCICE 1 (7 points) **Thèmes : Probabilités**

Partie A

1. **a.** L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



b. D'après la formule des probabilités totales :

$p(R) = p(R \cap V) + p\left(R \cap \overline{V}\right) = p_V(R) \times p(V) + p_{\overline{V}}(R) \times p\left(\overline{V}\right) = \dfrac{1}{50} \times \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{150}$

c. On cherche la probabilité : $p_R(V)$.

D'après la formule de Bayes, $p_R(V) = \dfrac{p(R \cap V)}{p(R)} = \dfrac{\frac{1}{50} \times \frac{2}{3}}{\frac{7}{150}} = \dfrac{2}{7}$.

2. **a.** Il s'agit là d'un schéma de Bernoulli : la répétition de 20 expériences aléatoires n'ayant que deux issues, identiques et indépendantes entre elles. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \dfrac{2}{3}$: $X \sim \mathscr{B}\left(20\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$

b. $p(X = 10) = \binom{20}{10} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{10} \times \left(1 - \dfrac{2}{3}\right)^{20-10} \approx 0{,}054.$

c. $p(X \geqslant 10) = 1 - p(X < 10) = 1 - p(X \leqslant 9) \approx 0{,}962$

d. Calculons l'espérance $E(X)$ de cette loi binomiale : $E(X) = n \times p = 20 \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{40}{3} \approx 13{,}333.$

En moyenne, il se rendra à la gare en vélo 13,33 jours par mois soit 13 jours à l'unité près.

3. Calculons l'espérance de la loi de probabilité de T :

$E(t) = 0{,}14 \times 10 + 0{,}13 \times 11 + 0{,}13 \times 12 + 0{,}12 \times 13 + 0{,}12 \times 14 + 0{,}11 \times 15 + 0{,}10 \times 16 + 0{,}08 \times 17 + 0{,}07 \times 18 = 13{,}5$

Il mettra en moyenne 13 minutes et demie pour se rendre à la gare en voiture.

EXERCICE 2 (7 points) **Thèmes : suites**

On considère la suite (T_n) définie par : $T_0 = 180$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+1} = 0,955T_n + 0,9$

1. **a.** Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n \geqslant 20$.

Initialisation : $T_0 = 180 \geqslant 20$. L'initialisation est vérifiée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons que $T_n \geqslant 0$. Montrons que $T_{n+1} \geqslant 20$.

$T_n \geqslant 20 \iff 0,955 \times T_n \geqslant 0,955 \times 20 \iff 0,955T_n \geqslant 19,1$

$\iff 0,955T_n + 0,9 \geqslant 19,1 + 0,9 \iff 0,955T_n + 0,9 \geqslant 20$. Donc $T_{n+1} \geqslant 20$. L'hérédité est démontrée.

Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$. D'après l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n \geqslant 20$.

b. $\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+1} - T_n = 0,955\ T_n + 0,9 - T_n = -0,045\ T_n + 0,9 = -0,045\left(T_n - \dfrac{0,9}{0,045}\right)$

$= -0,045(T_n - 20)$.

Or d'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n \geqslant 20$ donc $T_n - 20 \geqslant 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+1} - T_n \leqslant 0$. La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

c. La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée par 20. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie supérieure ou égale à 20.

2. On note $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = T_n - 20$.

a. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = T_{n+1} - 20 = 0,955 \times T_n + 0,9 - 20 = 0,955\ T_n - 19,1 = 0,955\left(T_n - \dfrac{19,1}{0,955}\right)$

$= 0,955(T_n - 20) = 0,955\ u_n$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 0,955u_n$ donc la suite (u_n) est géométrique de raison 0,955 et de premier terme $u_0 = T_0 - 20 = 160$.

b. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times q^n = 160 \times 0,955^n$.

De plus $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = T_n - 20$ donc $T_n = u_n + 20 = 160 \times 0,955^n + 20$.

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,955^n = 0$ car $0,955 \in]-1\ ;\ 1[$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = 20$.

d. $T_n \leqslant 120 \iff 160 \times 0,955^n + 20 \leqslant 120 \iff 160 \times 0,955^n \leqslant 120 - 20 \iff 160 \times 0,955^n \leqslant 100$

$\iff 0,955^n \leqslant \dfrac{100}{160} \iff 0,955^n \leqslant \dfrac{5}{8}$.

Sachant que la fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, on obtient :

$\ln(0,955^n) \leqslant \ln\left(\dfrac{5}{8}\right) \iff n \times \ln(0,955) \leqslant \ln\left(\dfrac{5}{8}\right)$. Or $\ln(0,955) < 0$ donc,

$n \geqslant \dfrac{\ln\left(\frac{5}{8}\right)}{\ln(0,955)}$. À la calculatrice, $\dfrac{\ln\left(\frac{5}{8}\right)}{\ln(0,955)} \approx 10,21$ donc $n \geqslant 11$.

3. **a.** Lorsque le gâteau est sorti du four, il va céder son énergie (sa chaleur) à l'extérieur (environnement ambiant). Sa masse étant très faible par rapport à celle de l'extérieur, il va diminuer sa température pour atteindre celle de l'extérieur, soit 20° C.

b. La fonction Python décrite est un algorithme de seuil : on cherche à partir de quand, la température devient inférieure ou égale au seuil fixé (ici l'argument de la fonction *seuil()* qui est x). La valeur renvoyée sera le premier entier vérifiant $T_n \leqslant x$.

temp(120) fournira le premier nombre entier n tel que $T_n \leqslant 120$, soit d'après la question précédente, $n = 11$. Dans le contexte de l'exercice, il faudra donc 11 minutes avant que la température du plat soit inférieure ou égale à 120° C

EXERCICE 3 (7 points) **Thèmes : géométrie dans l'espace**

1. **a.** Les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JL}$ ont pour coordonnées : $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{JL}\begin{pmatrix}-4\\-2\\-3\end{pmatrix}$.

Le produit scalaire de $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JL}$: $\overrightarrow{JK}.\overrightarrow{JL} = (-1)\times(-4)+2\times(-2)+0\times(-3) = 4-4 = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JL}$ sont orthogonaux donc le triangle JKL est rectangle en J.

b. $\mathscr{A}_{JKL} = \dfrac{JK\times JL}{2}$.

$JK = \left\|\overrightarrow{JK}\right\| = \sqrt{(-1)^2+2^2+0^2} = \sqrt{5}$ et $JL = \left\|\overrightarrow{JL}\right\| = \sqrt{(-4)^2+(-2)^2+(-3)^2} = \sqrt{29}$.

Donc $\mathscr{A}_{JKL} = \dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{29}}{2} = \dfrac{\sqrt{145}}{2}$ cm^2.

c. Le triangle JKL est rectangle en J donc en appliquant la formule de la tangente, on obtient :

$\tan\left(\widehat{\text{JKL}}\right) = \dfrac{JL}{JK} = \dfrac{\sqrt{29}}{\sqrt{5}}$.

Donc $\widehat{\text{JKL}} = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{29}}{\sqrt{5}}\right) \approx 67{,}5°$

2. **a.** Les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JL}$ ne sont pas colinéaires : il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{JK} = k\times\overrightarrow{JL}$.

En effet le système $\begin{cases} -1 = k\times(-4) \\ 2 = k\times(-2) \\ 0 = k\times(-3)\end{cases}$ n'admet pas de solution.

$\left(\overrightarrow{JK}\ ;\ \overrightarrow{JL}\right)$ est donc une base du plan (JKL).

Calculons :

$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{JK} = 6\times(-1)+3\times2+(-10)\times0 = 0$ et $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{JL} = 6\times(-4)+3\times(-2)+(-10)\times(-3) = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal aux $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JL}$. C'est donc un vecteur normal au plan (JKL).

b. Le plan (JKL) a pour équation cartésienne : $ax+by+cz+d = 0$, où $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ sont les cordonnées d'un vecteur normal au plan. En prenant comme vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}$, on obtient : (JKL) : $6x+3y-10z+d = 0$.

Or $J\in$ (JKL) donc $12+0-10+d = 0$ donc $d = -2$. Donc (JKL) a pour équation

$6x+3y-10z-2 = 0$.

3. **a.** La droite Δ est normale au plan (JKL) donc admet comme vecteur directeur $\overrightarrow{n}$, normal à (JKL). elle passe par T(10 ; 9 ; -6) donc une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 10+6t \\ y = 9+3t \\ z = -6-10t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$$

b. Le projeté orthogonal H de T sur le plan (IJK) est l'unique point d'intersection de Δ et (IJK). Ses coordonnées sont les solutions du système :

$$\begin{cases} x = 10+6t \\ y = 9+3t \\ z = -6-10t \\ 6x+3y-10z-2 = 0\end{cases}$$

En remplaçant x, y et z dans la dernière équation, on obtient :

$6(10+6t)+3(9+3t)-10(-6-10t)-2=0 \iff 145t+145=0 \iff t=-1$

Donc $x=10+6\times(-1)=4$, $y=9+3\times(-1)=6$ et $z=-6-10\times(-1)=4$

H a pour coordonnées (4 ; 6 ; 4)

c. $\mathscr{V}_{JKLT}=\dfrac{1}{3}\mathscr{B}\times h$. La base est le triangle JKL et la hauteur est le segment $[TH]$. D'après les question précédentes :

$\overrightarrow{TH}\begin{pmatrix}-6\\-3\\10\end{pmatrix}$ donc $TH=\left\|\overrightarrow{TH}\right\|=\sqrt{(-6)^2+(-3)^2+10^2}=\sqrt{145}$

Donc $\mathscr{V}_{JKLT}=\dfrac{1}{3}\mathscr{B}_{JKL}\times TH=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{145}}{2}\times\sqrt{145}=\dfrac{145}{6}$ cm^3.

EXERCICE 3 (7 points) **Thèmes : fonction exponentielle**

1. $\forall x\in\mathbb{R}$, $1-\dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}-\dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=\dfrac{2\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=\dfrac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)}=\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}}=\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}}$

Affirmation 1 : Vraie

2. $g(x)=\dfrac{1}{2}\iff\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}=\dfrac{1}{2}\iff 2\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x+1\iff\mathrm{e}^x=1\iff x=0$ **Affirmation 2 : Vraie**

3. La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=2x\mathrm{e}^{-x}+x^2\times-\mathrm{e}^{-x}=\left(2x-x^2\right)\mathrm{e}^{-x}$.

L'équation d'une tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a a pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$. Pour que l'axe des abscisses soit tangent à $\mathscr{C}$, il faut que la courbe $\mathscr{C}$ admette une tangente d'équation $y=0$ (équation de l'axe des abscisses), donc il faut que $f(a)=0$ et $f'(a)=0$. Sachant que $\forall a\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-a}\neq 0$,

$f(a)=0\iff a^2\mathrm{e}^{-a}=0\iff a^2=0\iff a=0$.

$f'(a)=0\iff(2a-a^2)\mathrm{e}^{-a}=0\iff 2a-a^2=0\iff a(2-a)=0\iff a=0$ ou $a=2$.

Donc $a=0$. Il n'existe donc qu'un seul point où l'axe des abscisses est tangent à $\mathscr{C}$.

Affirmation 3 : Vraie

4. La fonction h est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $\mathscr{C}_h$ sa courbe représentative.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $h'(x)=\mathrm{e}^x\times\left(1-x^2\right)+\mathrm{e}^x\times-2x=\mathrm{e}^x\left(1-x^2-2x\right)=\left(-x^2-2x+1\right)\mathrm{e}^x$.

La fonction h' est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $h''(x)=(-2x-2)\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x\times\left(-x^2-2x+1\right)=\mathrm{e}^x\left(-2x-2-x^2-2x+1\right)=\left(-x^2-4x-1\right)\mathrm{e}^x$

Si $\mathscr{C}_h$ admet des points d'inflexions, alors $h''(x)$ peut s'annuler et changer de signe. Or $\mathrm{e}^x>0$ pour tout réel x, donc étudions le signe de $-x^2-4x-1$ sur $\mathbb{R}$.

$-x^2-4x-1$ s'annule pour $x_1=-2-\sqrt{3}$ et pour $x_2=-2+\sqrt{3}$ car $\Delta=12$.

Le trinôme du second degré s'annule donc deux fois et change donc aussi de signe.

Affirmation 4 : Fausse

5. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + x} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x\left(1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}}$.

D'après les croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = 1$

Affirmation 5 : Fausse

6. $1 + \mathrm{e}^{2x} \geqslant 2\mathrm{e}^x \iff \mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + 1 \geqslant 0 \iff (\mathrm{e}^x - 1)^2 \geqslant 0$.

Cette dernière inégalité est vraie pour tout réel x.

Affirmation 6 : Vraie

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.