Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

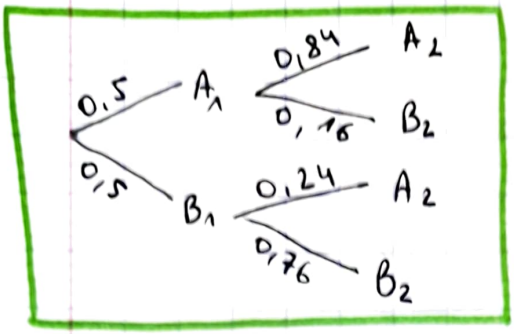
Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + NSI, veuillez visiter :
bac-maths-nsi.fr/annales-sujets-et-corriges

Sujet de Mathématiques 2022 - Amérique du Nord 2

Exercice 1

1)



2) a) On a :

$a_2 = P(A_2)$

$\{A_1 ; B_1\}$ est un système complet d'évènement de probabilité non nulle.

D'après la formule des probabilité totale, on a :

$a_2 = P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap A_2)$

$= P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(A_2)$

$= 0,5 \times 0,84 + 0,5 \times 0,24$

$\boxed{a_2 = 0,54}$

b) On cherche à calculer $P_{A_2}(B_1)$.

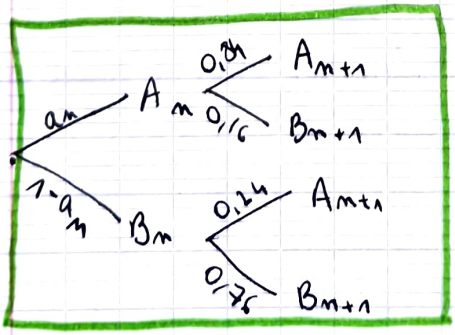
Comme $P(A_2) = a_2 \neq 0$, on a :

$$P_{A_2}(B_1) = \frac{P(A_2 \cap B_1)}{P(A_2)}$$

$$= \frac{0,5 \times 0,24}{0,54}$$

$\boxed{P_{A_2}(B_1) = 0,222}$

3) a)



b) $\{A_n ; B_n\}$ est un système complet d'évènement de probabilité non nulle.

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$a_{n+1} = a_n \times 0,84 + (1 - a_n) \times 0,24$$
$$= 0,84\, a_n + 0,24 - 0,24\, a_n$$
$$\boxed{a_{n+1} = 0,60\, a_n + 0,24}$$

4) Pour tout entier naturel non nul, on considère la proposition $\mathcal{P}_n$: " $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$ ".
Montrons à l'aide d'un raisonnement par récurrence simple que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

* Initialisation : ~~On a~~ : Montrons que $\mathcal{P}_1$ est vraie
on a : $0,6 - 0,1 \times 0,6^{0} = 0,6 - 0,1 = 0,1 = a_1$
Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie.

* Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
On a :
$$a_{n+1} = 0,6\, a_n + 0,24$$
$$= 0,6 \times (0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}) + 0,24 \quad \text{(par hypothèse de récurrence)}$$
$$= 0,36 - 0,6 \times 0,1 \times 0,6^{n-1} + 0,24$$
$$= 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n}$$
Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

* Conclusion : $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel non nul par principe de récurrence simple et on a :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}}$$

5) On a $0,6 \in]-1\,;1[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,6^{n-1} = 0$

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0,6}$

Au bout d'un certain temps, 60 % des vélos se trouveront au point A.

6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$a_n \geqslant 0,599 \iff 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1} \geqslant 0,599$$
$$\iff -0,1 \times 0,6^{n-1} \geqslant -0,001$$
$$\iff 0,1 \times 0,6^{n-1} \leqslant 0,001$$
$$\iff 0 < 0,6^{n-1} \leqslant 0,01$$
$$\iff (n-1)\ln(0,6) \leqslant \ln(0,01) \quad \text{(par stricte croissance de la fonction } x \mapsto \ln(x) \text{ sur }]0\,;+\infty[)$$

$\Leftrightarrow \quad n-1 \geqslant \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,6)} \qquad (\ln(0,6)<0)$

$\Leftrightarrow \quad n \geqslant \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,6)} + 1$

Or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,6)} + 1 \approx 10,015$

Ainsi le plus petit entier naturel non nul n tel que $a_n > 0,599$ est 11.

Donc au bout du 11ème matin, la probabilité que le vélos se trouve au point A est supérieure à 0,599.

Exercice 2

Partie A

1) p est dérivable sur $[-3;4]$ comme somme de fonctions qui le sont, et on a pour tout x appartenant à $[-3;4]$,

$p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$.

x	-3		4
$p'(x)$		$+$	
p	-68	$\nearrow$	37

car $\Delta = (-6)^2 - 4\times3\times5$
$= -24 < 0$
(pas de racine réelle)

Et • $p(3) = (-3)^3 - 3\times(-3)^2 + 5\times(-3) + 1$
$= -27 - 27 - 15 + 1$
$= 16$

• $p(4) = 4^3 - 3\times4^2 + 5\times4 + 1$
$= 64 - 48 + 20 + 1$
$= 37$

$\boxed{p \text{ est strictement croissante sur l'intervalle } [-3;4]}$

2) p est continue (somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$) et strictement croissante sur $[-3;4]$.

De plus $p([-3;4]) = [-68;37]$. Or $0 \in [-68;37)$, ainsi d'après le théorème de la bijection (ou corollaire du théorème des valeurs intermédiaires) l'équation $\boxed{p(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur } [-3;4]}$

3) On a $p(-0,3) = -0,257 < 0$

et $p(0,2) = 0,112 > 0$

Ainsi $\boxed{-0,3 < \alpha < -0,2}$

(à la calculatrice)

Rq : afficher le tableau de valeurs de la fonction entre -3 et 4 avec un pas de $0,1$ (dixième).

4)

x	-3		α		4
$p(x)$		$-$	ϕ	$+$	

Partie B

1) a) f est dérivable sur $[-3;4]$ comme produit de fonctions qui le sont et on a pour tout x appartenant à $[-3;4]$:

$$f'(x) = \frac{e^x(1+x^2) - 2xe^x}{(1+x^2)^2}$$

ie $\boxed{f'(x) = \dfrac{e^x(1-2x+x^2)}{(1+x^2)^2}}$

b) On a $f'(1) = \dfrac{e(1-2\times 1+1^2)}{(1+1^2)^2}$

$= \dfrac{e\times 0}{4}$

ie $\boxed{f'(1) = 0}$

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

2) a) La courbe $\mathcal{C}_f$ semble convexe sur $[-3; -\cancel{0,3}]$, puis concave sur $[-\cancel{0,3}; 1]$ et enfin à nouveau convexe sur $[1;4]$.

Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ semble admettre deux points d'inflexion, ie le toboggan semble assurer de bonnes sensations.

b) Etudions le signe de f'' (🤯).

x	-3		α		1		4
$p(x)$		$-$	ϕ	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	ϕ	$+$	
$e^x/(1+x^2)^3$		$+$		$+$		$+$	
$f''(x)$		$+$	ϕ	$-$	ϕ	$+$	

positivité de l'exponentielle

f change de convexité en α et en 1, donc $\mathcal{C}_f$ admet bien deux points d'inflexion (en α et en 1).

Ainsi le toboggan assure de bonnes sensations !

Exercice 3

1) a) On a : $\vec{AR}\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{AT}\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{RT}\begin{pmatrix}-3\\-3\\0\end{pmatrix}$.

Calculons les normes de ces vecteurs.

$AR = \sqrt{0^2+3^2+2^2} = \sqrt{13}$

$AT = \sqrt{0^2+(-3)^2+2^2} = \sqrt{13} = AR$

$RT = \sqrt{(-3)^2+(-3)^2+0^2} = \sqrt{18} \neq \sqrt{13}$

Ainsi le triangle ART est isocèle en A.

b) $\vec{AR}\cdot\vec{AT} = 0\times(-3)+3\times0+2\times2$

ie $\vec{AR}\cdot\vec{AT} = 4$

c) D'après la définition du produit scalaire, on a :

$\vec{AR}\cdot\vec{AT} = AR\times AT\times\cos(\vec{AR};\vec{AT})$

ie $\vec{AR}\cdot\vec{AT} = AR\times AT\times\cos(\widehat{RAT})$

Donc $\cos(\widehat{RAT}) = \dfrac{\vec{AR}\cdot\vec{AT}}{AR\times AT}$

ie $\widehat{RAT} = \cos^{-1}\left(\dfrac{\vec{AR}\cdot\vec{AT}}{AR\times AT}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\dfrac{4}{\sqrt{13}\times\sqrt{13}}\right)$

ie $\widehat{RAT} = 72,1°$

2) a) $\cdot\ \vec{n}\cdot\vec{AR} = 2\times0+(-2)\times3+3\times2 = 0$

$\cdot\ \vec{n}\cdot\vec{AT} = 2\times(-3)+(-2)\times0+3\times2 = 0$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ART) donc $\vec{n}$ est normal au plan (ART)

b) $\vec{n}$ étant normal au plan (ART), on a pour tout point $M(x;y;z)$ du plan : $2x-2y+3z+d=0$

avec $d\in\mathbb{R}$ à déterminer.

Or $A \in (ART)$, donc on a :

$2 \times 6 + (-2) \times 0 + 3 \times 2 + d = 0 \iff 18 + d = 0$

$\iff d = -18$.

Ainsi une équation cartésienne du plan (ART) est :

$$2x - 2y + 3z - 18 = 0$$

3) a) Δ est orthogonale au plan (ART) donc un vecteur directeur de Δ est le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. De plus $S(3; 5/2; 0) \in \Delta$.

Ainsi une représentation paramétrique de Δ est :

$$\Delta : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5/2 - 2t \\ z = 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

b) Soit $L(x; y; z)$. ~~Soit~~ t L vérifie le système (avec t à déterminer)

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5/2 - 2t \\ z = 3t \end{cases} \\ 2x - 2y + 3z - 18 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5/2 - 2t \\ z = 3t \end{cases} \\ 2(3 + 2t) - 2(5/2 - 2t) + 3(3t) - 18 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5/2 - 2t \\ z = 3t \end{cases} \\ 17t - 17 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5/2 - 2t \\ z = 3t \end{cases} \\ t = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \begin{cases} x = 5 \\ y = 1/2 \\ z = 3 \end{cases} \\ t = 1 \end{cases}$$

D'où $L(5; 1/2; 3)$

4) Soit $t \in [0; 1]$, on a $\overrightarrow{DN}\begin{pmatrix} 0 \\ -4t \\ 4t \end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{DK}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

On a pour tout $t \in [0; 1]$, $\overrightarrow{DN} = t \times \overrightarrow{DK}$.

Donc pour tout $t \in [0; 1]$, $\overrightarrow{DN}$ et $\overrightarrow{DK}$ sont colinéaires, les points D, N et K sont donc alignés.

Ainsi pour tout t appartenant à $[0; 1]$, N appartient au segment $[DK]$

5) ~~On a~~ $\vec{SL}$

Soit $t \in [0;1]$. On a :

$\vec{SL}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{SN}\begin{pmatrix}-3\\11/2-4t\\4t\end{pmatrix}$.

[SL] et [SN] perpendiculaires $\Leftrightarrow \vec{SL}\cdot\vec{SN} = 0$

$\Leftrightarrow 2\times(-3)+(-2)\times(11/2-4t)+3\times 4t = 0$

$\Leftrightarrow -6 - 11 + 8t + 12t = 0$

$\Leftrightarrow -17 + 20t = 0$

$\Leftrightarrow t = \frac{17}{20}$.

Ainsi les deux rayons lasers sont perpendiculaires si on a $N(0 ; 2315 ; 1715)$

Exercice 4

Q1) **Réponse d**

Justifications :

$a = \ln(9) + \ln(\sqrt{3}/3) + \ln(1/9)$

$= \ln(9) + \ln(\sqrt{3}/3) + \ln(1) - \ln(9)$

$= \ln(\sqrt{3}) - \ln(3)$

$= \frac{1}{2}\ln(3) - \ln(3)$

$a = -\frac{1}{2}\ln(3)$

Q2) **Réponse b c**

Justifications : (E) est définie sur $]10;+\infty[$ (car $x-10>0$ pour que (E) existe).

Soit $x \in]10;+\infty[$.

$\ln(x) + \ln(x-10) = \ln(3) + \ln(7)$

$\Leftrightarrow \ln(x(x-10)) = \ln(21)$

$\Leftrightarrow \ln(x^2-10x) = \ln(21)$

$\Leftrightarrow x^2-10x = 21$ (par stricte croissance de la fonction $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow x^2-10x-21 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{10-2\sqrt{46}}{2}$ ou $x = \frac{10+2\sqrt{46}}{2}$ (car $\Delta = 184 = 4\times 46$)

$\Leftrightarrow x = 5-\sqrt{46}$ ou $x = 5+\sqrt{46}$

$5-\sqrt{46} < 0$ donc pas solution

Q3) **Réponse d**

Justification : f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonction qui le sont et on a

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = 2x(-1+\ln(x)) + \frac{1}{x} \times x^2$$

ie $\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = -x + 2x\ln(x)$

$$= x(2\ln(x)-1)$$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
x	‖	$+$		$+$	
$2\ln(x)-1$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$+\infty$ ↘	0	↗	$+\infty$

Soit $x \in]0;+\infty[$.

car $f'(x) = 0 \iff x(2\ln(x)-1) = 0$

$\iff x = 0$ ou $2\ln(x)-1 = 0$

$\iff \ln(x) = 1/2$ (car $x \in]0;+\infty[$.)

$\iff x = e^{1/2}$ (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.)

$= \sqrt{e}$

La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\sqrt{e}$ a pour équation : $y = \underbrace{f'(\sqrt{e})}_{=0}(x-\sqrt{e}) + f(\sqrt{e})$

ie $y = f(\sqrt{e})$

$= (e^{1/2})^2 \times (-1 + \ln(\sqrt{e}))$

$= e \times (-1/2)$

ie $\boxed{T : y = -\frac{1}{2}e}$

Q4) **Réponse b**

Justification On réalise 5 fois une épreuve de Bernoulli de manière identique et idépendante (tirage avec remise) dont le succès "obtenir un jeton jaune" a pour probabilité $2/5$

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(5;2/5)$.

On a $P(X=2) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3 \approx 0,346$

Q5) **Réponse d**

Justification : On reprend la variable aléatoire X précédente.

$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1)$

$= 1 - P(X = 0)$ $= 1 - \binom{5}{0}\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^5 \approx 0,922$

Q6) **Réponse c**

Justification : En reprenant la variable aléatoire X précédente.

$E(X) = 5 \times \frac{2}{5} = 2$

Sur un très grand nombre de répétition, en moyenne deux jetons jaunes auront été tirés.

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.