Bac Général Maths + NSI (Mathématiques et Numérique et sciences informatiques)

SUJET D'EXAMEN (SESSION OFFICIELLE)

Mathématiques - Session 2022

Sujet de l'examen national tel que publié pour la session indiquée. Source : sujets nationaux publiés par le ministère chargé de l'examen et les services académiques. Document mis à disposition par FormaV pour la révision.

Toutes les annales et leurs corrigés : https://bac-maths-nsi.fr/annales-sujets-et-corriges

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2022

MATHÉMATIQUES

Jour 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9.

Le sujet propose 4 exercices
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

Chaque exercice est noté sur **7 points (le total sera ramené sur 20 points).**
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Parmi les angines, un quart nécessite la prise d'antibiotiques, les autres non.

Afin d'éviter de prescrire inutilement des antibiotiques, les médecins disposent d'un test de diagnostic ayant les caractéristiques suivantes :

- lorsque l'angine nécessite la prise d'antibiotiques, le test est positif dans 90 % des cas ;
- lorsque l'angine ne nécessite pas la prise d'antibiotiques, le test est négatif dans 95 % des cas.

Les probabilités demandées dans la suite de l'exercice seront arrondies à 10^{-4} près si nécessaire.

Partie 1

Un patient atteint d'angine et ayant subi le test est choisi au hasard.

On considère les événements suivants :

- A : « le patient est atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques » ;
- T : « le test est positif » ;
- $\bar{A}$ et $\bar{T}$ sont respectivement les événements contraires de A et T.

1. Calculer $\mathrm{P}(A \cap T)$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

2. Démontrer que $\mathrm{P}(T) = 0{,}2625$.

3. On choisit un patient ayant un test positif. Calculer la probabilité qu'il soit atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques.

4. **a.** Parmi les événements suivants, déterminer ceux qui correspondent à un résultat erroné du test : $A \cap T$, $\bar{A} \cap T$, $A \cap \bar{T}$, $\bar{A} \cap \bar{T}$.

b. On définit l'événement E : « le test fournit un résultat erroné ».
Démontrer que $\mathrm{P}(E) = 0{,}0625$.

Partie 2

On sélectionne au hasard un échantillon de n patients qui ont été testés.
On admet que l'on peut assimiler ce choix d'échantillon à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de patients de cet échantillon ayant un test erroné.

1. On suppose que $n = 50$.

a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}0625$.

b. Calculer P(X=7).

c. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins un patient dans l'échantillon dont le test est erroné.

2. Quelle valeur minimale de la taille de l'échantillon faut-il choisir pour que $P(X \geqslant 10)$ soit supérieure à 0,95 ?

Soit k un nombre réel.

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = ku_n(1 - u_n).$$

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes. On y étudie deux cas de figure selon les valeurs de *k*.

Partie 1

Dans cette partie, $k = 1{,}9$ et $u_0 = 0{,}1$.

On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}9u_n(1 - u_n)$.

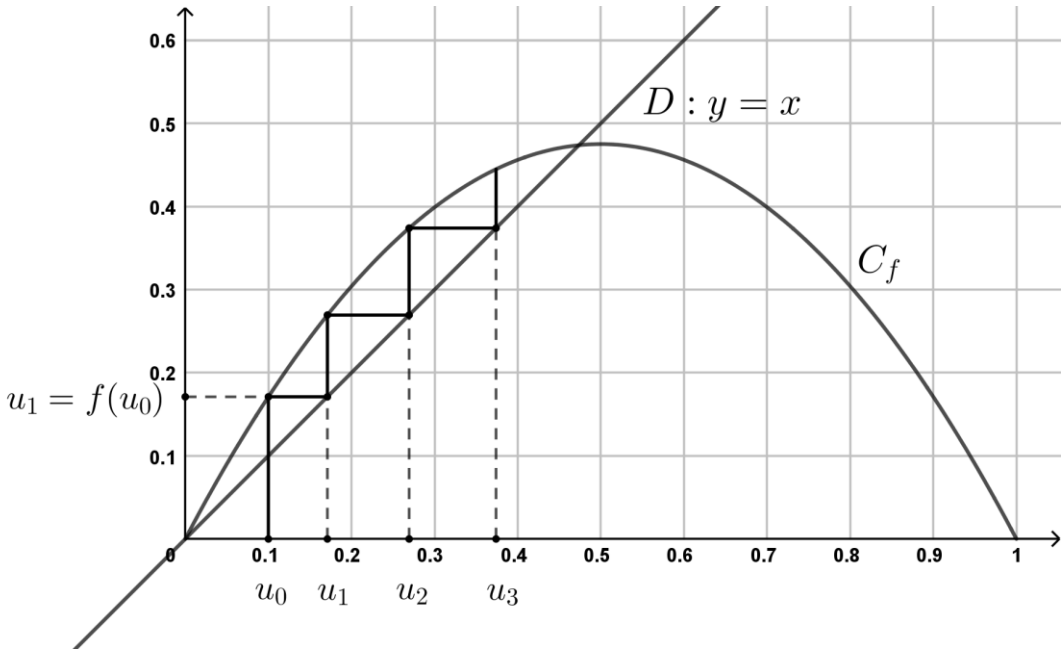
1. On considère la fonction f définie sur $[0\ ;1]$ par $f(x) = 1{,}9x(1 - x)$.

a. Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0\ ;1]$.

b. En déduire que si $x \in \left[0\ ; \frac{1}{2}\right]$ alors $f(x) \in \left[0\ ; \frac{1}{2}\right]$.

2. Ci-dessous sont représentés les premiers termes de la suite (u_n) construits à partir de la courbe C_f de la fonction f et de la droite D d'équation $y = x$.

Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite éventuelle.



3. **a.** En utilisant les résultats de la question **1**, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}.$$

b. En déduire que la suite (u_n) converge.

c. Déterminer sa limite.

Partie 2

Dans cette partie, $k = \frac{1}{2}$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1 - u_n)$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

On admet que pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

1. Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

2. On considère la fonction Python `algo(p)` où `p` désigne un entier naturel non nul :

```
def algo(p) :
    u = 1/4
    n = 0
    while u > 10**(-p) :
        u = 1/2*u*(1-u)
        n = n+1
    return(n)
```

Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel non nul `p`, la boucle `while` ne tourne pas indéfiniment, ce qui permet à la commande `algo(p)` de renvoyer une valeur.

Partie 1

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{2\ln x}{x}.$$

1. On note g' la dérivée de g. Démontrer que pour tout réel x strictement positif :

$$g'(x) = \frac{2 - 2\ln x}{x^2}$$

2. On dispose de ce tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$:

x	0	1	e	$+\infty$
Variations de g	$-\infty$	0	$\frac{2}{e}$	0

Justifier les informations suivantes lues dans ce tableau :

a. la valeur $\frac{2}{e}$;

b. les variations de la fonction g sur son ensemble de définition ;

c. les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.

3. En déduire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = (\ln(x))^2$.

Dans cette partie, chaque étude est effectuée sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

1. Démontrer que sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, la fonction f est une primitive de la fonction g.

2. À l'aide de la **partie 1**, étudier :

a. la convexité de la fonction f ;

b. les variations de la fonction f.

3. **a.** Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse e.

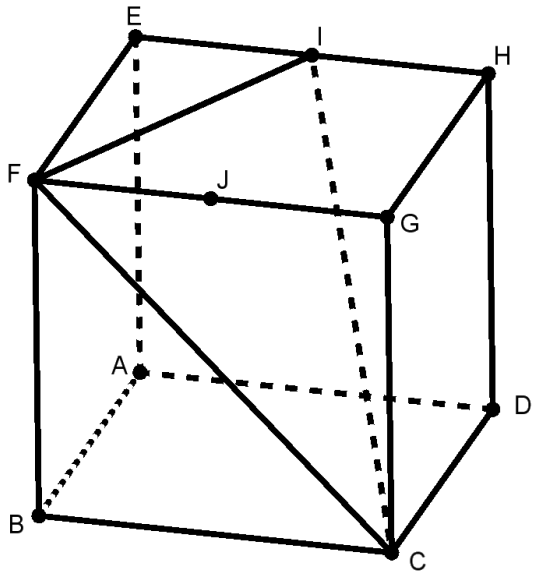
b. En déduire que, pour tout réel x dans $]0 ; e]$:

$$(\ln(x))^2 \geqslant \frac{2}{e}x - 1.$$

EXERCICE 4 (7 points) **Thème : géométrie dans le plan et dans l'espace**

On considère le cube ABCDEFGH. On note I le milieu du segment [EH] et on considère le triangle CFI.

L'espace est muni du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ et on admet que le point I a pour coordonnées $\left(0 ; \frac{1}{2} ; 1\right)$ dans ce repère.



1.

a. Donner sans justifier les coordonnées des points C, F et G.

b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (CFI).

c. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (CFI) est : $x + 2y + 2z - 3 = 0$.

2. On note *d* la droite passant par G et orthogonale au plan (CFI).

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite *d*.

b. Démontrer que le point K $\left(\frac{7}{9} ; \frac{5}{9} ; \frac{5}{9}\right)$ est le projeté orthogonal du point G sur le plan (CFI).

c. Déduire des questions précédentes que la distance du point G au plan (CFI) est égale à $\frac{2}{3}$.

3. On considère la pyramide GCFI.

On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{1}{3} \times b \times h$, où b est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.

a. Démontrer que le volume de la pyramide GCFI est égal à $\frac{1}{6}$, exprimé en unité de volume.

b. En déduire l'aire du triangle CFI, en unité d'aire.