Bac Général Maths + NSI (Mathématiques et Numérique et sciences informatiques)

SUJET D'EXAMEN (SESSION OFFICIELLE)

Mathématiques - Session 2022

Sujet de l'examen national tel que publié pour la session indiquée. Source : sujets nationaux publiés par le ministère chargé de l'examen et les services académiques. Document mis à disposition par FormaV pour la révision.

Toutes les annales et leurs corrigés : https://bac-maths-nsi.fr/annales-sujets-et-corriges

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2022

MATHÉMATIQUES

JOUR 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Le sujet propose 4 exercices.

Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices**.

Chaque exercice est noté sur **7 points (le total sera ramené sur 20 points).**

Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

EXERCICE 1 (7 points)

Principaux domaines abordés :
Fonctions, Fonction logarithme ;
Convexité.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 6x + 4\ln(x)\,.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. a. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. a. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à $]0\,;+\infty[$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
En déduire le tableau de variations de f.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[4;5]$.

4. On admet que, pour tout x de $]0\,;+\infty[$, on a :

$$f''(x) = \frac{2x^2-4}{x^2}\ .$$

a. Étudier la convexité de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$. On précisera les valeurs exactes des coordonnées des éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

b. On note A le point de coordonnées $\left(\sqrt{2}\,;f\left(\sqrt{2}\right)\right)$.
Soit t un réel strictement positif tel que $t \neq \sqrt{2}$.
Soit M le point de coordonnées $\left(t\,;f(t)\right)$.

En utilisant la question **4.a**, indiquer, selon la valeur de t, les positions relatives du segment $[\mathrm{AM}]$ et de la courbe $\mathcal{C}_f$.

EXERCICE 2 (7 points)

Principaux domaines abordés :
Suites ;
Fonctions, Fonction exponentielle.

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = x^3 e^x$.
On admet que la fonction f est dérivable sur **R** et on note f' sa fonction dérivée.

1. On définit la suite (u_n) par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n) \ .$$

a. Calculer u_1 puis u_2.
On donnera les valeurs exactes puis les valeurs approchées à 10^{-3}.

b. On considère la fonction `fonc`, écrite en langage Python ci-dessous.

On rappelle qu'en langage Python, « `i in range(n)` » signifie que `i` varie de 0 *à* `n-1`.

```
def fonc(n):
    u=-1
    for i in range(n):
        u=u**3*exp(u)
    return u
```

Déterminer, sans justifier, la valeur renvoyée par `fonc(2)` arrondie à 10^{-3}.

2. a. Démontrer que, pour tout x réel, on a $f'(x) = x^2 e^x (x+3)$.

b. Justifier que le tableau de variations de f sur **R** est celui représenté ci-dessous :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
f	0	↘	$-27e^{-3}$	↗	$+\infty$

c. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

$$-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0 \ .$$

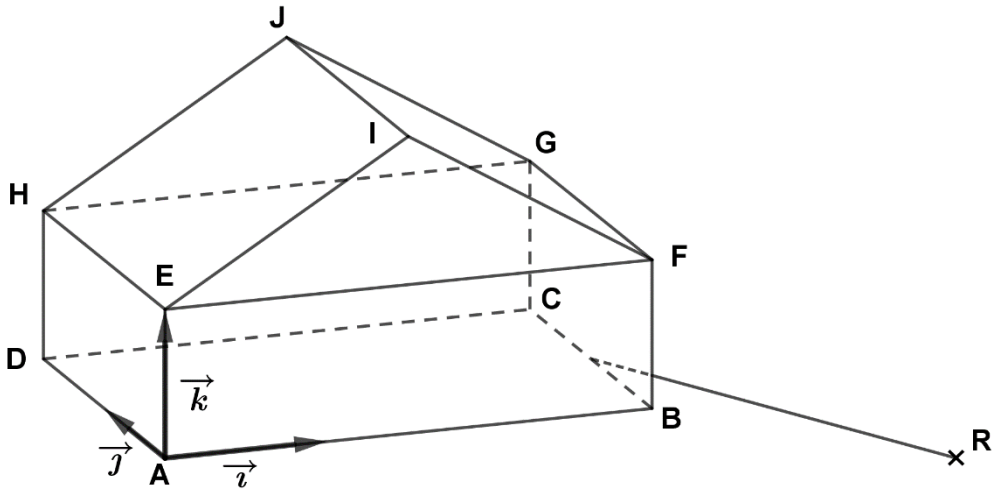
d. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

e. On note ℓ la limite de la suite (u_n).
On rappelle que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
Déterminer ℓ . (Pour cela, on admettra que l'équation $x^2 e^x - 1 = 0$ possède une seule solution dans **R** et que celle-ci est strictement supérieure à $\frac{1}{2}$.)

EXERCICE 3 (7 points)

Principaux domaines abordés :
Géométrie dans l'espace.

Une maison est constituée d'un parallélépipède rectangle ABCDEFGH surmonté d'un prisme EFIHGJ dont une base est le triangle EIF isocèle en I.
Cette maison est représentée ci-dessous.



On a $AB=3$, $AD=2$, $AE=1$.
On définit les vecteurs $\vec{\imath}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\vec{\jmath}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, $\vec{k}=\overrightarrow{AE}$.

On munit ainsi l'espace du repère orthonormé $(A\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

1. Donner les coordonnées du point G.

2. Le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(2\,;0\,;-3)$ est vecteur normal au plan (EHI).
Déterminer une équation cartésienne du plan (EHI).

3. Déterminer les coordonnées du point I.

4. Déterminer une mesure au degré près de l'angle $\widehat{EIF}$.

5. Afin de raccorder la maison au réseau électrique, on souhaite creuser une tranchée rectiligne depuis un relais électrique situé en contrebas de la maison.

Le relais est représenté par le point R de coordonnées $(6\,;-3\,;-1)$.

La tranchée est assimilée à un segment d'une droite Δ passant par R et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(-3\,;4\,;1)$. On souhaite vérifier que la tranchée atteindra la maison au niveau de l'arête $[BC]$.

a. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.

b. On admet qu'une équation du plan (BFG) est $x=3$.
Soit K le point d'intersection de la droite Δ avec le plan (BFG).
Déterminer les coordonnées du point K .

c. Le point K appartient-il bien à l'arête $[BC]$?

EXERCICE 4 (7 points)

Principaux domaines abordés :
Probabilités.

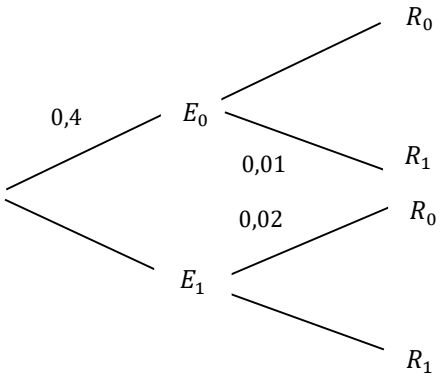
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

On considère un système de communication binaire transmettant des 0 et des 1.
Chaque 0 ou 1 est appelé *bit*.

En raison d'interférences, il peut y avoir des erreurs de transmission :
un 0 peut être reçu comme un 1 et, de même, un 1 peut être reçu comme un 0.

Pour un bit choisi au hasard dans le message, on note les événements :

- E_0 : « le bit envoyé est un 0 » ;
- E_1 : « le bit envoyé est un 1 » ;
- R_0 : « le bit reçu est un 0 » ;
- R_1 : « le bit reçu est un 1 ».



On sait que :
$P(E_0) = 0{,}4$; $P_{E_0}(R_1) = 0{,}01$; $P_{E_1}(R_0) = 0{,}02$.
On rappelle que la probabilité conditionnelle de A sachant B est notée $P_B(A)$.

On peut ainsi représenter la situation par l'arbre de probabilités ci-dessus.

1. La probabilité que le bit envoyé soit un 0 et que le bit reçu soit un 0 est égale à :

a. $0{,}99$ **b.** $0{,}396$ **c.** $0{,}01$ **d.** $0{,}4$

2. La probabilité $\mathrm{P}(R_0)$ est égale à :

a. $0{,}99$ **b.** $0{,}02$ **c.** $0{,}408$ **d.** $0{,}931$

3. Une valeur, approchée au millième, de la probabilité $\mathrm{P}_{R_1}(E_0)$ est égale à :

a. $0{,}004$ **b.** $0{,}001$ **c.** $0{,}007$ **d.** $0{,}010$

4. La probabilité de l'événement « il y a une erreur de transmission » est égale à :

a. $0{,}03$ **b.** $0{,}016$ **c.** $0{,}16$ **d.** $0{,}015$

Un message de longueur huit bits est appelé un *octet*.
On admet que la probabilité qu'un octet soit transmis sans erreur est égale à $0{,}88$.

5. On transmet successivement 10 octets de façon indépendante.
La probabilité, à 10^{-3} près, qu'exactement 7 octets soient transmis sans erreur est égale à :

a. $0{,}915$ **b.** $0{,}109$ **c.** $0{,}976$ **d.** $0{,}085$

6. On transmet successivement 10 octets de façon indépendante.
La probabilité qu'au moins 1 octet soit transmis sans erreur est égale à :

a. $1 - 0{,}12^{10}$ **b.** $0{,}12^{10}$ **c.** $0{,}88^{10}$ **d.** $1 - 0{,}88^{10}$

7. Soit N un entier naturel. On transmet successivement N octets de façon indépendante. Soit N_0 la plus grande valeur de N pour laquelle la probabilité que les N octets soient tous transmis sans erreur est supérieure ou égale à $0{,}1$.
On peut affirmer que :

a. $N_0 = 17$ **b.** $N_0 = 18$ **c.** $N_0 = 19$ **d.** $N_0 = 20$