Bac Général Maths + NSI (Mathématiques et Numérique et sciences informatiques)

SUJET D'EXAMEN (SESSION OFFICIELLE)

Mathématiques - Session 2021

Sujet de l'examen national tel que publié pour la session indiquée. Source : sujets nationaux publiés par le ministère chargé de l'examen et les services académiques. Document mis à disposition par FormaV pour la révision.

Toutes les annales et leurs corrigés : https://bac-maths-nsi.fr/annales-sujets-et-corriges

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2021

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Le candidat traite **4 exercices :** les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1, commun à tous les candidats (5 points)

Dans une école de statistique, après étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux façons :

- 10 % des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60 % d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20 % d'entre eux sont admis à l'école.

Partie I

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement.
On notera :

- D l'événement « le candidat a été sélectionné sur dossier » ;
- A l'événement « le candidat a été admis à l'école » ;
- $\overline{D}$ et $\overline{A}$ les événements contraires des événements D et A respectivement.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école.

3. Montrer que la probabilité de l'événement A est égale à $0{,}24$.

4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné ?

Partie II

1. On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à $0{,}24$.
On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort.

a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de cette loi ?

b. Calculer la probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école. On donnera une réponse arrondie au centième.

c. Calculer la probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école. On donnera une réponse arrondie au centième.

2. Un lycée présente n candidats au recrutement dans cette école, où n est un entier naturel non nul.
On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à $0{,}24$ et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.

a. Donner l'expression, en fonction de n, de la probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école.

b. À partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est-elle supérieure ou égale à $0{,}99$?

Exercice 2, commun à tous les candidats (5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}.$$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1.

a. Préciser la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe C_f.

2. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a :

$$f'(x)=\frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$$

où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

3. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$. On établira un tableau de variations de la fonction f dans lequel apparaîtront les limites.

4. Soit m un nombre réel. Préciser, en fonction des valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.

5. On note Δ la droite d'équation $y=-x$.
On note A un éventuel point de C_f d'abscisse a en lequel la tangente à la courbe C_f est parallèle à la droite Δ.

a. Montrer que a est solution de l'équation $\mathrm{e}^x(x-1)+x^2=0$.

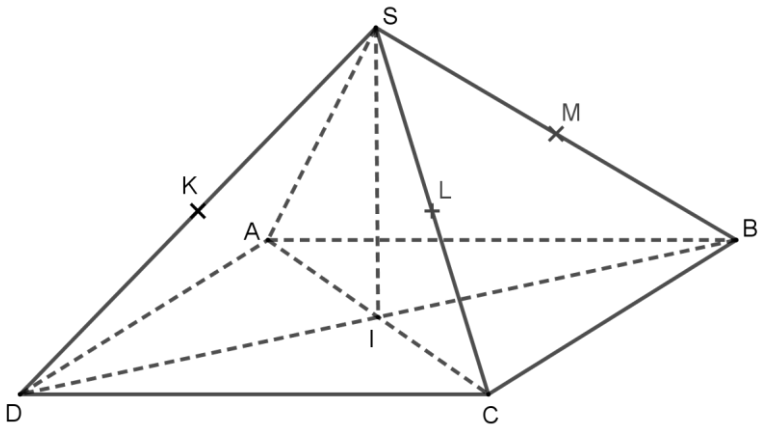
On note g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=\mathrm{e}^x(x-1)+x^2$.
On admet que la fonction g est dérivable et on note g' sa fonction dérivée.

b. Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de g sur $[0;+\infty[$.

c. Montrer qu'il existe un unique point A en lequel la tangente à C_f est parallèle à la droite Δ.

Exercice 3, commun à tous les candidats (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur.
Le point I est le centre du carré ABCD. On suppose que : IC = IB = IS = 1.
Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) **c.** (AC) et (SB) **d.** (LM) et (AD)

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace$(I ; \vec{IC}, \vec{IB}, \vec{IS})$.
Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

$$I(0 ; 0 ; 0) ; A(-1 ; 0 ; 0) ; B(0 ; 1 ; 0) ; C(1 ; 0 ; 0) ; D(0 ; -1 ; 0) ; S(0 ; 0 ; 1).$$

2. Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

a. $\left(\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)$ **b.** $\left(\frac{1}{4} ; -\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)$ **c.** $\left(-\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2} ; 1\right)$

3. Les coordonnées du vecteur $\vec{AS}$ sont :

a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

4. Une représentation paramétrique de la droite (AS) est :

a. $\begin{cases}x = -1 - t\\y = t\\z = -t\end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ **b.** $\begin{cases}x = -1 + 2t\\y = 0\\z = 1 + 2t\end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ **c.** $\begin{cases}x = t\\y = 0\\z = 1 + t\end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ **d.** $\begin{cases}x = -1 - t\\y = 1 + t\\z = 1 - t\end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

5. Une équation cartésienne du plan (SCB) est :

a. $y + z - 1 = 0$ **b.** $x + y + z - 1 = 0$ **c.** $x - y + z = 0$ **d.** $x + z - 1 = 0$

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A

Principaux domaines abordés :
Suites numériques ; raisonnement par récurrence ; suites géométriques.

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1\,.$$

1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,5625
5	3	3,421875
6	4	4,31640625

2.

a. Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B ?

b. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

3.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leq u_n \leq n + 1$.

b. En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

c. Démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1\,.$$

4. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.

Exercice B

Principaux domaines abordés :
Fonction logarithme ; convexité.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \frac{3}{x}$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

On note $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

Démontrer que, pour tout nombre réel $x > 0$, on a :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}.$$

3.

a. Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$. On y fera figurer les valeurs exactes des extremums et les limites de f en 0 et en $+\infty$. On admettra que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

b. Par simple lecture du tableau de variations, préciser le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \frac{5}{3}$.

4. Étudier la convexité de la fonction f, c'est-à-dire préciser les parties de l'intervalle $]0;+\infty[$ sur lesquelles f est convexe, et celles sur lesquelles f est concave. On justifiera que la courbe $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion, dont on précisera les coordonnées.