Bac Général Maths + NSI (Mathématiques et Numérique et sciences informatiques)

# SUJET D'EXAMEN (SESSION OFFICIELLE)

Mathématiques - Session 2021

Sujet de l'examen national tel que publié pour la session indiquée. Source : sujets nationaux publiés par le ministère chargé de l'examen et les services académiques. Document mis à disposition par FormaV pour la révision.

Toutes les annales et leurs corrigés : https://bac-maths-nsi.fr/annales-sujets-et-corriges

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

## ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

**Session 2021**

# MATHÉMATIQUES

**Lundi 7 juin 2021**

Durée de l'épreuve : **4 heures**

*L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.*
*L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.*

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6

Le candidat traite **4 exercices** : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

*Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*
*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.*

## EXERCICE 1 commun à tous les candidats (5 points)

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte $1\,000$ abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd $10\,\%$ de ses abonnés auxquels s'ajoutent $250$ nouveaux abonnés.
Pour tout entier naturel $n$, on note $u_n$ le nombre d'abonnés à son profil en l'année (2020+$n$), suivant cette modélisation. Ainsi $u_0 = 1\,000$.

1. Calculer $u_1$.
2. Justifier que pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 250$.
3. La fonction Python nommée « suite » est définie ci-dessous. Dans le contexte de l'exercice, interpréter la valeur renvoyée par suite(10).

```
def suite(n) :
  u=1000
  for i in range(n) :
    u=0.9*u+250
  return u
```

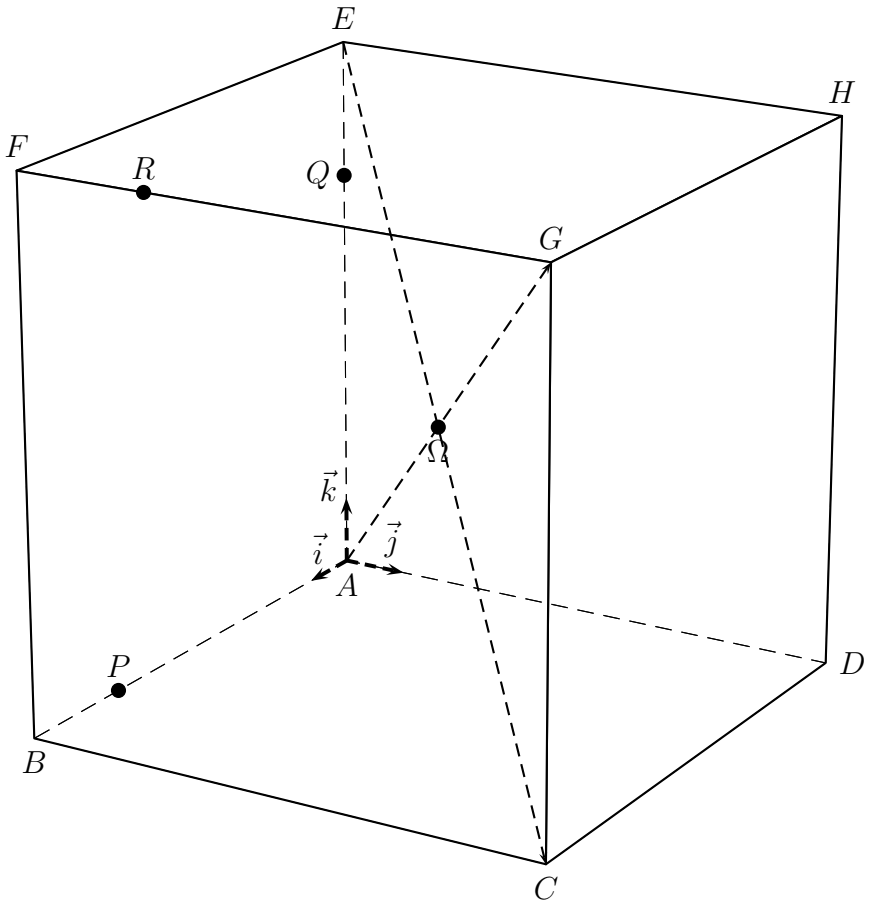
4. (a) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel $n$, $u_n \leq 2\,500$.
   (b) Démontrer que la suite $(u_n)$ est croissante.
   (c) Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)$ est convergente.
5. Soit $(v_n)$ la suite définie par $v_n = u_n - 2\,500$ pour tout entier naturel $n$.
   (a) Montrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $0{,}9$ et de terme initial $v_0 = -1\,500$.
   (b) Pour tout entier naturel $n$, exprimer $v_n$ en fonction de $n$ et montrer que : $u_n = -1500 \times 0{,}9^n + 2\,500$.
   (c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)$ et interpréter dans le contexte de l'exercice.
6. Écrire un programme qui permet de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera $2\,200$. Déterminer cette année.

## EXERCICE 2 commun à tous les candidats (5 points)

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête $8$ cm et de centre $\Omega$.

Les points $P$, $Q$ et $R$ sont définis par $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$.

On se place dans le repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $\overrightarrow{i} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$ , $\overrightarrow{j} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{k} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AE}$.




### Partie I

1. Dans ce repère, on admet que les coordonnées du point $R$ sont $(8; 2; 8)$.
   Donner les coordonnées des points $P$ et $Q$.
2. Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(1; -5; 1)$ est un vecteur normal au plan $(PQR)$.
3. Justifier qu'une équation cartésienne du plan $(PQR)$ est $x - 5y + z - 6 = 0$.

### Partie II

On note $L$ le projeté orthogonal du point $\Omega$ sur le plan $(PQR)$.

1. Justifier que les coordonnées du point $\Omega$ sont $(4; 4; 4)$.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite $d$ perpendiculaire au plan $(PQR)$ et passant par $\Omega$.
3. Montrer que les coordonnées du point $L$ sont $\left(\frac{14}{3}; \frac{2}{3}; \frac{14}{3}\right)$.
4. Calculer la distance du point $\Omega$ au plan $(PQR)$.

## EXERCICE 3 commun à tous les candidats (5 points)

Un sac contient les huit lettres suivantes : A B C D E F G H ($2$ voyelles et $6$ consonnes).

Un jeu consiste à tirer simultanément au hasard deux lettres dans ce sac. On gagne si le tirage est constitué d'une voyelle et d'une consonne.

1. Un joueur extrait simultanément deux lettres du sac.
   (a) Déterminer le nombre de tirages possibles.
   (b) Déterminer la probabilité que le joueur gagne à ce jeu.

*Les questions 2 et 3 de cet exercice sont indépendantes.*
*Pour la suite de l'exercice, on admet que la probabilité que le joueur gagne est égale à* $\frac{3}{7}$.

2. Pour jouer, le joueur doit payer $k$ euros, $k$ désignant un entier naturel non nul.
   Si le joueur gagne, il remporte la somme de $10$ euros, sinon il ne remporte rien.
   On note $G$ la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur (c'est-à-dire la somme remportée à laquelle on soustrait la somme payée).
   (a) Déterminer la loi de probabilité de $G$.
   (b) Quelle doit être la valeur maximale de la somme payée au départ pour que le jeu reste favorable au joueur ?
3. Dix joueurs font chacun une partie. Les lettres tirées sont remises dans le sac après chaque partie.
   On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre de joueurs gagnants.
   (a) Justifier que $X$ suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
   (b) Calculer la probabilité, arrondie à $10^{-3}$, qu'il y ait exactement quatre joueurs gagnants.
   (c) Calculer $P(X \geqslant 5)$ en arrondissant à $10^{-3}$. Donner une interprétation du résultat obtenu.
   (d) Déterminer le plus petit entier naturel $n$ tel que $P(X \leqslant n) \geqslant 0,9$.

## EXERCICE au choix du candidat (5 points)

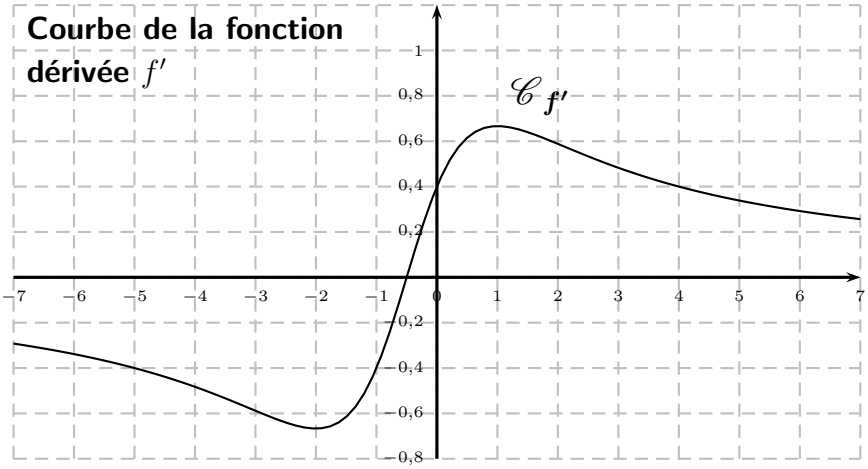
**Le candidat doit traiter UN SEUL des deux exercices A ou B.**
**Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.**

## EXERCICE - A

**Principaux domaines abordés**
- convexité
- fonction logarithme

### Partie I : lectures graphiques

$f$ désigne une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée $f'$.




*Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes.*

1. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction $f$ en $0$.
2. (a) Donner les variations de la fonction dérivée $f'$.
   (b) En déduire un intervalle sur lequel $f$ est convexe.

### Partie II : étude de fonction

La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2 + x + \dfrac{5}{2}\right)$.

1. Calculer les limites de la fonction $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer une expression $f'(x)$ de la fonction dérivée de $f$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire le tableau des variations de $f$. On veillera à placer les limites dans ce tableau.
4. (a) Justifier que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution $\alpha$ dans l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.
   (b) Donner une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-1}$ près.
5. La fonction $f'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x + 4}{\left(x^2 + x + \dfrac{5}{2}\right)^2}$.

   Déterminer le nombre de points d'inflexion de la courbe représentative de $f$.

## EXERCICE - B

**Principaux domaines abordés**
- Étude de fonction, fonction exponentielle
- Équations différentielles

### Partie I

Considérons l'équation différentielle

$$y' = -0{,}4y + 0{,}4$$

où $y$ désigne une fonction de la variable $t$, définie et dérivable sur $[0; +\infty[$.

1. (a) Déterminer une solution particulière constante de cette équation différentielle.
   (b) En déduire l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.
2. Déterminer la fonction $g$, solution de cette équation différentielle, qui vérifie $g(0) = 10$.

### Partie II

Soit $p$ la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $p(t) = \dfrac{1}{g(t)} = \dfrac{1}{1 + 9\mathrm{e}^{-0{,}4t}}$.

1. Déterminer la limite de $p$ en $+\infty$.
2. Montrer que $p'(t) = \dfrac{3{,}6\mathrm{e}^{-0{,}4t}}{\left(1 + 9\mathrm{e}^{-0{,}4t}\right)^2}$ pour tout $t \in [0; +\infty[$.
3. (a) Montrer que l'équation $p(t) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution $\alpha$ sur $[0; +\infty[$.
   (b) Déterminer une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-1}$ près à l'aide d'une calculatrice.

### Partie III

1. $p$ désigne la fonction de la partie II.
   Vérifier que $p$ est solution de l'équation différentielle $y' = 0{,}4y(1-y)$ avec la condition initiale $y(0) = \dfrac{1}{10}$ où $y$ désigne une fonction définie et dérivable sur $[0; +\infty[$.
2. Dans un pays en voie de développement, en l'année 2020, $10\,\%$ des écoles ont accès à internet. Une politique volontariste d'équipement est mise en œuvre et on s'intéresse à l'évolution de la proportion des écoles ayant accès à internet. On note $t$ le temps écoulé, exprimé en année, depuis l'année 2020.
   La proportion des écoles ayant accès à internet à l'instant $t$ est modélisée par $p(t)$.
   Interpréter dans ce contexte la limite de la question II 1 puis la valeur approchée de $\alpha$ de la question II 3(b) ainsi que la valeur $p(0)$.