Bac Général Maths + NSI (Mathématiques et Numérique et sciences informatiques)

SUJET D'EXAMEN (SESSION OFFICIELLE)

Mathématiques - Session 2021

Sujet de l'examen national tel que publié pour la session indiquée. Source : sujets nationaux publiés par le ministère chargé de l'examen et les services académiques. Document mis à disposition par FormaV pour la révision.

Toutes les annales et leurs corrigés : https://bac-maths-nsi.fr/annales-sujets-et-corriges

∽ Baccalauréat 2021 ∾

L'intégrale Spécialité mathématiques 2021 (candidats libres)

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Amérique du Nord mai 2021 3
Polynésie 19 juin 2021 7
Asie 1 7 juin 2021 12
Asie 2 8 juin 2021 17
Centres étrangers 1 9 juin 2021 23
Centres étrangers 2 10 juin 2021 29
Métropole 1 21 juin 2021 35
Métropole 2 22 juin 2021 40
Métropole J1 13 septembre 2019 45
Métropole J2 14 septembre 2019 52

À la fin index des notions abordées

Baccalauréat Amérique du Nord mai 2021
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Les probabilités demandées dans cet exercice seront arrondies à 10^{-3}.

Un laboratoire pharmaceutique vient d'élaborer un nouveau test anti-dopage.

Partie A

Une étude sur ce nouveau test donne les résultats suivants :

- si un athlète est dopé, la probabilité que le résultat du test soit positif est 0,98 (sensibilité du test) ;
- si un athlète n'est pas dopé, la probabilité que le résultat du test soit négatif est 0,995 (spécificité du test).

On fait subir le test à un athlète sélectionné au hasard au sein des participants à une compétition d'athlétisme.
On note D l'évènement « l'athlète est dopé » et T l'évènement « le test est positif ».
On admet que la probabilité de l'évènement D est égale à 0,08.

1. Traduire la situation sous la forme d'un arbre pondéré.

2. Démontrer que $P(T) = 0{,}083$.

3. **a.** Sachant qu'un athlète présente un test positif, quelle est la probabilité qu'il soit dopé ?

b. Le laboratoire décide de commercialiser le test si la probabilité de l'évènement « un athlète présentant un test positif est dopé » est supérieure ou égale à 0,95.

Le test proposé par le laboratoire sera-t-il commercialisé ? Justifier.

Partie B

Dans une compétition sportive, on admet que la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est 0,103.

1. Dans cette question **1.** on suppose que les organisateurs décident de contrôler 5 athlètes au hasard parmi les athlètes de cette compétition.

On note X la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes présentant un test positif parmi les 5 athlètes contrôlés.

a. Donner la loi suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.

b. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

c. Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif ?

2. Combien d'athlètes faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité de l'évènement « au moins un athlète contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à 0,75 ? Justifier.

EXERCICE 2 **5 points**

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île du Pacifique.
Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus.

Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0{,}6 \\ u_{n+1} &= 0{,}75u_n(1-0{,}15u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020+n$.

1. Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$f(x) = 0{,}75x(1-0{,}15x).$$

2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ et dresser son tableau de variations.

3. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,1]$ l'équation $f(x) = x$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).

5. Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.

a. Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.

b. Le biologiste a programmé en langage Python la fonction **menace()** ci-dessous :

```
def menace() :
    u = 0,6
    n = 0
    while u > 0,02 :
        u = 0,75*u*(1-0,15*u)
        n = n+1
    return n
```

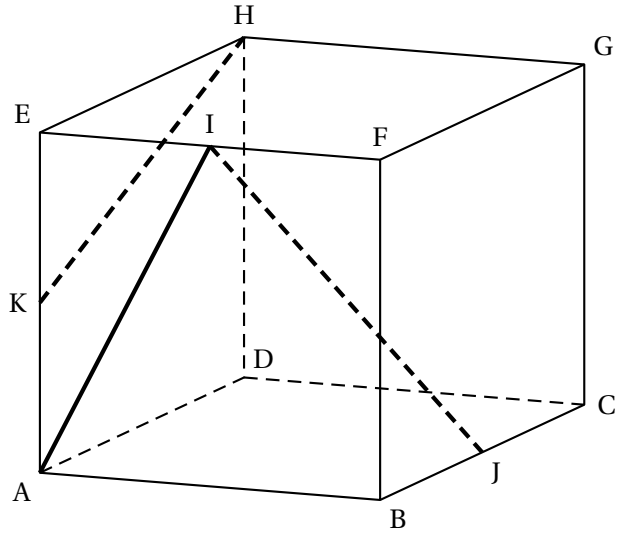
Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction menace().
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les questions 1. à 5. de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

On considère un cube ABCDEFGH. Le point I est le milieu du segment [EF], le point J est le milieu du segment [BC] et le point K est le milieu du segment [AE].



1. Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

Dans la suite, on se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AD}},\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

2. **a.** Donner les coordonnées des points I et J.

b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\text{IJ}}$, $\overrightarrow{\text{AE}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ sont coplanaires.

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+3y-2z+2=0$ ainsi que les droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques ci-dessous :

$$d_1 : \begin{cases} x &= 3+t \\ y &= 8-2t \\ z &= -2+3t \end{cases} ,t\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x &= 4+t \\ y &= 1+t \\ z &= 8+2t \end{cases} ,t\in\mathbb{R}.$$

3. Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

4. Montrer que la droite d_2 est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

5. Montrer que le point L(4 ; 0 ; 3) est le projeté orthogonal du point M(5 ; 3 ; 1) sur le plan $\mathscr{P}$.

EXERCICE AU CHOIX DU CANDIDAT

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Exercice A **5 points**

Principaux domaines abordés :
- Fonction exponentielle
- Convexité

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
On justifiera chaque réponse.

Affirmation 1 : Pour tous réels a et b, $\left(\text{e}^{a+b}\right)^2 = \text{e}^{2a} + \text{e}^{2b}$.

Affirmation 2 : Dans le plan muni d'un repère, la tangente au point A d'abscisse 0 à la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2+(3-x)\text{e}^x$ admet pour équation réduite $y = 2x+1$.

Affirmation 3 : $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{e}^{2x} - \text{e}^x + \dfrac{3}{x} = 0$.

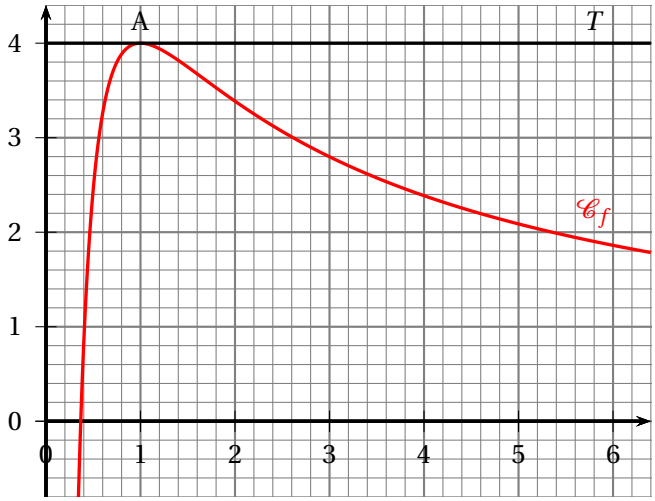
Affirmation 4 : L'équation $1-x+\text{e}^{-x}=0$ admet une seule solution appartenant à l'intervalle $[0\,;2]$.

Affirmation 5 : La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2-5x+\text{e}^x$ est convexe.

EXERCICE B **5 points**

Principaux domaines abordés :
- Fonction logarithme népérien
- Convexité

Dans le plan muni d'un repère, on considère ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f, deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale T au point A$(1\,;\,4)$.



1. Préciser les valeurs $f(1)$ et $f'(1)$.

On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{a+b\ln x}{x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

2. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f'(x)=\frac{b-a-b\ln x}{x^2}.$$

3. En déduire les valeurs des réels a et b.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{4+4\ln x}{x}.$$

4. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

5. Déterminer le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

6. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f''(x)=\frac{-4+8\ln x}{x^3}.$$

7. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ possède un unique point d'inflexion B dont on précisera les coordonnées.

Baccalauréat Polynésie 2 juin 2021
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ n° 2

Le candidat traite **4 exercices** : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\,000$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0{,}95u_n + 200.$$

1. Calculer u_1 et vérifier que $u_2 = 9\,415$.

2. **a.** Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$u_n > 4\,000.$$

b. On admet que la suite (u_n) est décroissante. Justifier qu'elle converge.

3. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 4\,000$.

a. Calculer v_0.

b. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à 0,95.

c. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 4\,000 + 6\,000 \times 0{,}95^n.$$

d. Quelle est la limite de la suite (v_n) ? Justifier la réponse.

4. En 2020, une espèce animale comptait 10 000 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 5 % chaque début d'année.

Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 200 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021.

Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ».

Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

Un test est mis au point pour détecter une maladie dans un pays.
Selon les autorités sanitaires de ce pays, 7 % des habitants sont infectés par cette maladie.
Parmi les individus infectés, 20 % sont déclarés négatifs.
Parmi les individus sains, 1 % sont déclarés positifs.
Une personne est choisie au hasard dans la population.
On note :

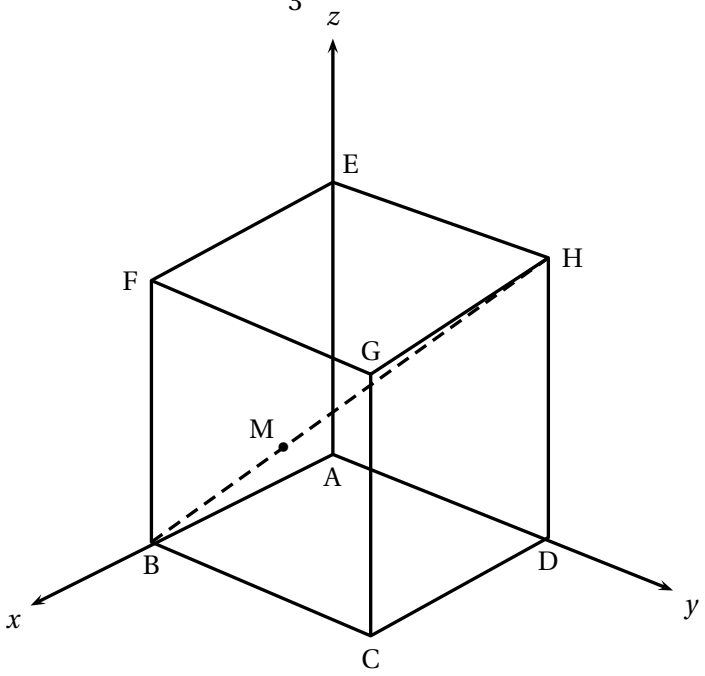
- M l'évènement : « la personne est infectée par la maladie » ;
- T l'évènement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.
2. **a.** Quelle est la probabilité pour que la personne soit infectée par la maladie et que son test soit positif ?
   b. Montrer que la probabilité que son test soit positif est de 0,065 3.
3. On sait que le test de la personne choisie est positif.
   Quelle est la probabilité qu'elle soit infectée ?
   On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.
4. On choisit dix personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
   On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre d'individus ayant un test positif parmi les dix personnes.
   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres.
   b. Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif.
   On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.
5. Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins une de ces personnes ait un test positif, soit supérieure à 99 %.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans l'espace, on considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur égale à 1.
On munit l'espace du repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\ \overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AD}},\ \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.
On considère le point M tel que $\overrightarrow{\text{BM}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{BH}}$.



1. Par lecture graphique, donner les coordonnées des points B, D, E, G et H.
2. **a.** Quelle est la nature du triangle EGD ? Justifier la réponse.
   b. On admet que l'aire d'un triangle équilatéral de côté c est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{4}c^2$.
   Montrer que l'aire du triangle EGD est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Démontrer que les coordonnées de M sont $\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.

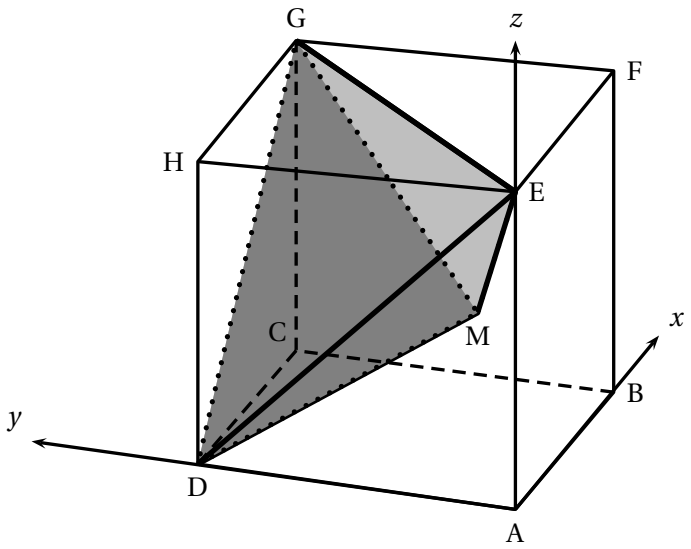
4. **a.** Justifier que le vecteur $\vec{n}(-1\,;\,1\,;\,1)$ est normal au plan (EGD).

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EGD) est : $-x+y+z-1=0$.

c. Soit $\mathscr{D}$ la droite orthogonale au plan (EGD) et passant par le point M.
Montrer qu'une représentation paramétrique de cette droite est :

$$\mathscr{D}:\begin{cases} x &= \frac{2}{3}-t \\ y &= \frac{1}{3}+t \\ z &= \frac{1}{3}+t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

5. Le cube ABCDEFGH est représenté ci-dessus selon une vue qui permet de mieux percevoir la pyramide GEDM, en gris sur la figure :



Le but de cette question est de calculer le volume de la pyramide GEDM.

a. Soit K, le pied de la hauteur de la pyramide GEDM issue du point M.
Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right)$.

b. En déduire le volume de la pyramide GEDM.
On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V=\frac{b\times h}{3}$ où b désigne l'aire d'une base et h la hauteur associée.

EXERCICE au choix du candidat **5 points**

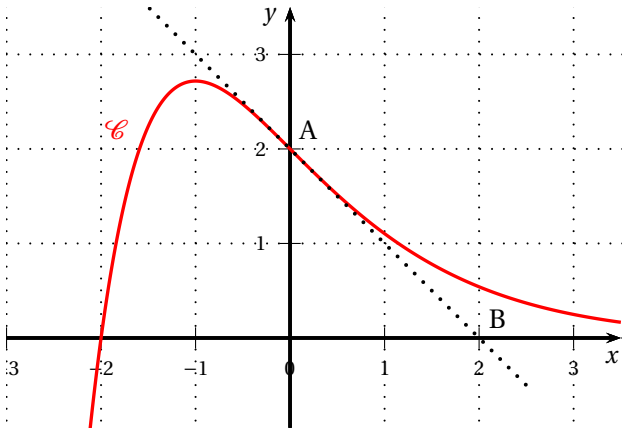
Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.
Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

EXERCICE A

Principaux domaines abordés : Fonction exponentielle, convexité, dérivation, équations différentielles

Cet exercice est composé de trois parties indépendantes.

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé, une portion de la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:



On considère les points A(0 ; 2) et B(2 ; 0).

Partie 1

Sachant que la courbe $\mathscr{C}$ passe par A et que la droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A, donner par lecture graphique :

1. La valeur de $f(0)$ et celle de $f'(0)$.
2. Un intervalle sur lequel la fonction f semble convexe.

Partie 2

On note (E) l'équation différentielle

$$y' = -y + \mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que $g : x \longmapsto x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de (E).

1. Donner toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(H) : y' = -y$.
2. En déduire toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).
3. Sachant que la fonction f est la solution particulière de (E) qui vérifie $f(0) = 2$, déterminer une expression de $f(x)$ en fonction de x.

Partie 3

On admet que pour tout nombre réel x, $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

1. On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
   a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.
   On ne précisera ni la limite de f en $-\infty$ ni la limite de f en $+\infty$.
   On calculera la valeur exacte de l'extremum de f sur $\mathbb{R}$.

2. On rappelle que f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f.

a. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.

b. Peut-on affirmer que f est convexe sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$?

EXERCICE B

Principaux domaines abordés : Fonction logarithme népérien, dérivation

Cet exercice est composé de deux parties.

Certains résultats de la première partie seront utilisés dans la deuxième.

Partie 1 : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;4]$ par :

$$f(x) = -30x + 50 + 35\ln x.$$

1. On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\,;4]$, montrer que :

$$f'(x) = \frac{35 - 30x}{x}.$$

b. Dresser le tableau de signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;4]$.

c. En déduire les variations de f sur ce même intervalle.

2. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur l'intervalle $[1\,;4]$ puis donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

3. Dresser le tableau de signe de $f(x)$ pour $x \in [1\,;\,4]$.

Partie 2 : Optimisation

Une entreprise vend du jus de fruits. Pour x milliers de litres vendus, avec x nombre réel de l'intervalle $[1\,;\,4]$, l'analyse des ventes conduit à modéliser le bénéfice $B(x)$ par l'expression donnée en milliers d'euros par :

$$B(x) = -15x^2 + 15x + 35x\ln x.$$

1. D'après le modèle, calculer le bénéfice réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend 2 500 litres de jus de fruits.

On donnera une valeur approchée à l'euro près de ce bénéfice.

2. Pour tout x de l'intervalle $[1\,;4]$, montrer que $B'(x) = f(x)$ où B' désigne la fonction dérivée de B.

3. **a.** À l'aide des résultats de la **partie 1**, donner les variations de la fonction B sur l'intervalle $[1\,;4]$.

b. En déduire la quantité de jus de fruits, au litre près, que l'entreprise doit vendre afin de réaliser un bénéfice maximal.

Baccalauréat Asie 7 juin 2021 Jour 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1 000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année $(2020+n)$, suivant cette modélisation. Ainsi $u_0 = 1\,000$.

1. Calculer u_1.

2. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 250$.

3. La fonction Python nommée « suite » est définie ci-dessous. Dans le contexte de l'exercice, interpréter la valeur renvoyée par suite(10).

```
def suite( n) :
    u = 1 000
    for i in range(n) :
        u = 0,9*u + 250
    return u
```

4. **a.** Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 2\,500$.

b. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

c. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2\,500$ pour tout entier naturel n.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de terme initial $v_0 = -1\,500$.

b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n et montrer que :

$$u_n = -1\,500 \times 0{,}9^n + 2\,500.$$

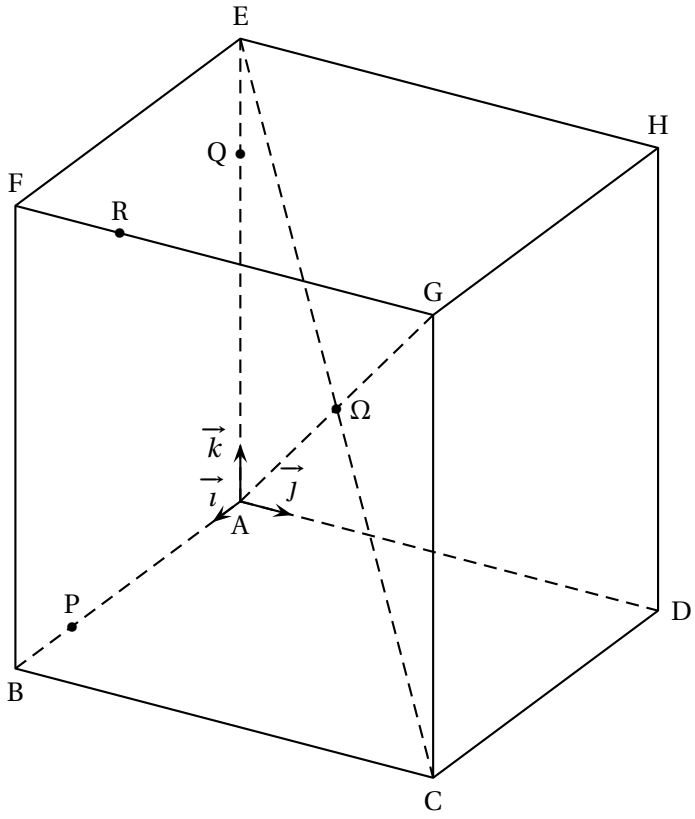
c. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter dans le contexte de l'exercice.

6. Écrire un programme qui permet de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2 200.

Déterminer cette année.

EXERCICE 2 commun à tous les candidats **5 points**

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 8 cm et de centre Ω.
Les points P, Q et R sont définis par $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$.
On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$ avec : $\vec{\imath} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AE}$.



Partie I

1. Dans ce repère, on admet que les coordonnées du point R sont (8 ; 2 ; 8).
   Donner les coordonnées des points P et Q.
2. Montrer que le vecteur $\vec{n}(1\ ;\ -5\ ;\ 1)$ est un vecteur normal au plan (PQR).
3. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (PQR) est $x-5y+z-6=0$.

Partie II

On note L le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (PQR).

1. Justifier que les coordonnées du point Ω sont (4 ; 4 ; 4).
2. Donner une représentation paramétrique de la droite d perpendiculaire au plan (PQR) et passant par Ω.
3. Montrer que les coordonnées du point L sont $\left(\frac{14}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{14}{3}\right)$
4. Calculer la distance du point Ω au plan (PQR).

EXERCICE 3 commun à tous les candidats **5 points**

Un sac contient les huit lettres suivantes : A B C D E F G H (2 voyelles et 6 consonnes).
Un jeu consiste à tirer simultanément au hasard deux lettres dans ce sac.
On gagne si le tirage est constitué d'une voyelle **et** d'une consonne.

1. Un joueur extrait simultanément deux lettres du sac.
   a. Déterminer le nombre de tirages possibles.
   b. Déterminer la probabilité que le joueur gagne à ce jeu.

Les questions 2 et 3 de cet exercice sont indépendantes.

Pour la suite de l'exercice, on admet que la probabilité que le joueur gagne est égale à $\frac{3}{7}$.

2. Pour jouer, le joueur doit payer k euros, k désignant un entier naturel non nul.
Si le joueur gagne, il remporte la somme de 10 euros, sinon il ne remporte rien.
On note G la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur (c'est-à-dire la somme remportée à laquelle on soustrait la somme payée).

a. Déterminer la loi de probabilité de G.

b. Quelle doit être la valeur maximale de la somme payée au départ pour que le jeu reste favorable au joueur ?

3. Dix joueurs font chacun une partie. Les lettres tirées sont remises dans le sac après chaque partie.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de joueurs gagnants.

a. Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.

b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'il y ait exactement quatre joueurs gagnants.

c. Calculer $P(X \geqslant 5)$ en arrondissant à 10^{-3}. Donner une interprétation du résultat obtenu.

d. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $P(X \leqslant n) \geqslant 0{,}9$.

EXERCICE au choix du candidat **5 points**

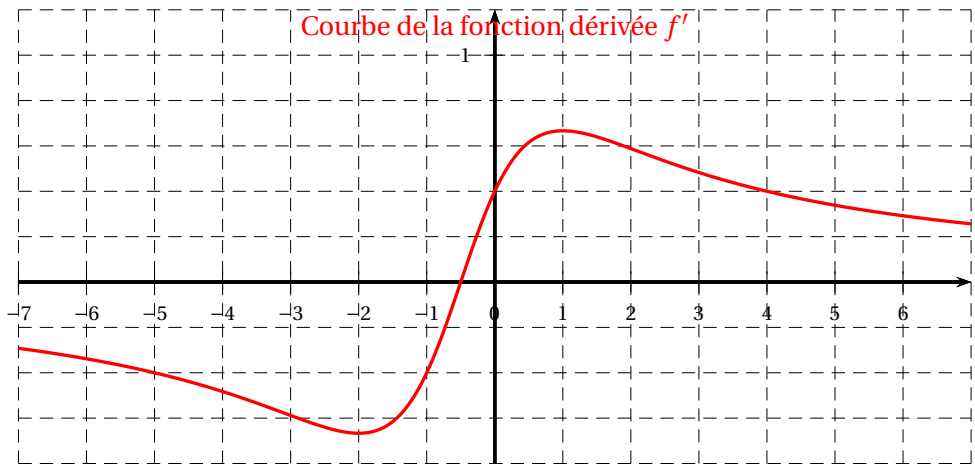
Le candidat doit traiter UN SEUL des deux exercices A ou B
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B

EXERCICE – A

Principaux domaines abordés
– convexité
– fonction logarithme

Partie I : lectures graphiques

f désigne une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes

1. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction f en 0.
2. **a.** Donner les variations de la fonction dérivée f'.
   b. En déduire un intervalle sur lequel f est convexe.

Partie II : étude de fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right).$$

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer une expression $f'(x)$ de la fonction dérivée de f pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire le tableau des variations de f. On veillera à placer les limites dans ce tableau.
4. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution α dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.
   b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
5. La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x + 4}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2}$.
   Déterminer le nombre de points d'inflexion de la courbe représentative de f.

EXERCICE – B

Principaux domaines abordés
– Étude de fonction, fonction exponentielle
– Équations différentielles

Partie I

Considérons l'équation différentielle

$$y' = -0{,}4y + 0{,}4$$

où y désigne une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.

1. **a.** Déterminer une solution particulière constante de cette équation différentielle.
   b. En déduire l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.
   c. Déterminer la fonction g, solution de cette équation différentielle, qui vérifie $g(0) = 10$.

Partie II

Soit p la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$p(t) = \frac{1}{g(t)} = \frac{1}{1 + 9\,\mathrm{e}^{-0{,}4t}}.$$

1. Déterminer la limite de p en $+\infty$.

2. Montrer que $p'(t) = \dfrac{3{,}6\,\mathrm{e}^{-0{,}4t}}{\left(1+9\,\mathrm{e}^{-0{,}4t}\right)^2}$ pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[$.

3. **a.** Montrer que l'équation $p(t) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution α sur $[0\,;\,+\infty[$.

b. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près à l'aide d'une calculatrice.

Partie III

1. p désigne la fonction de la partie II.
Vérifier que p est solution de l'équation différentielle $y' = 0{,}4y(1-y)$ avec la condition initiale $y(0) = \dfrac{1}{10}$ où y désigne une fonction définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. Dans un pays en voie de développement, en l'année 2020, 10 % des écoles ont accès à internet.
Une politique volontariste d'équipement est mise en œuvre et on s'intéresse à l'évolution de la proportion des écoles ayant accès à internet.
On note t le temps écoulé, exprimé en année, depuis l'année 2020.
La proportion des écoles ayant accès à internet à l'instant t est modélisée par $p(t)$.
Interpréter dans ce contexte la limite de la question II 1 puis la valeur approchée de α de la question II 3. b. ainsi que la valeur $p(0)$.

Baccalauréat Asie 8 juin 2021 Jour 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM)

Pour chaque question, trois affirmations sont proposées, une seule de ces affirmations est exacte.
Le candidat recopiera sur sa copie le numéro de chaque question et la lettre de la réponse choisie pour celle-ci.
AUCUNE JUSTIFICATION n'est demandée. Une réponse fausse ou l'absence de réponse n'enlève aucun point.

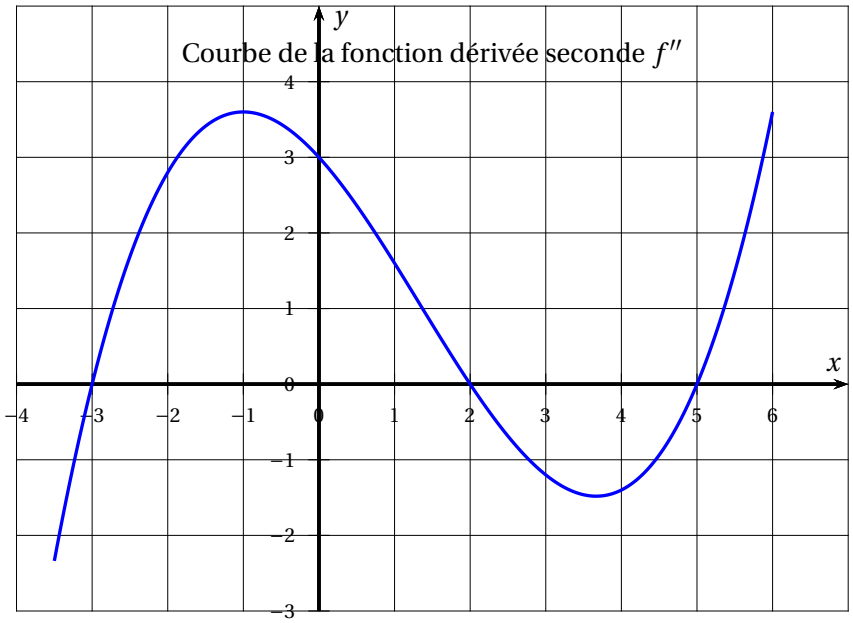
1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x^2 - 2x - 1\right) \mathrm{e}^{\,x}.$$

A. La fonction dérivée de f est la fonction définie par $f'(x) = (2x-2)\,\mathrm{e}^{\,x}$.
B. La fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,2]$.
C. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{5+\mathrm{e}^{\,x}}$.
Sa courbe représentative dans un repère admet :
A. une seule asymptote horizontale ;
B. une asymptote horizontale et une asymptote verticale ;
C. deux asymptotes horizontales.

3. On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_{f''}$ représentant la fonction dérivée seconde f'' d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-3{,}5\,;\,6]$.



A. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-3\,;\,3]$.

B. La fonction f admet trois points d'inflexion.

C. La fonction dérivée f' de f est décroissante sur l'intervalle $[0\,;2]$.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 17n + 20$.

A. La suite (u_n) est minorée.

B. La suite (u_n) est décroissante.

C. L'un des termes de la suite (u_n) est égal à 2 021.

5. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 5$.

On considère la fonction « seuil » suivante écrite en Python :

```
def seuil :
    u = 2
    n = 0
    while u < 45 :
        u = 0,75*u + 5
        n = n+1
    return n
```

Cette fonction renvoie :

A. la plus petite valeur de n telle que $u_n \geqslant 45$;

B. la plus petite valeur de n telle que $u_n < 45$;

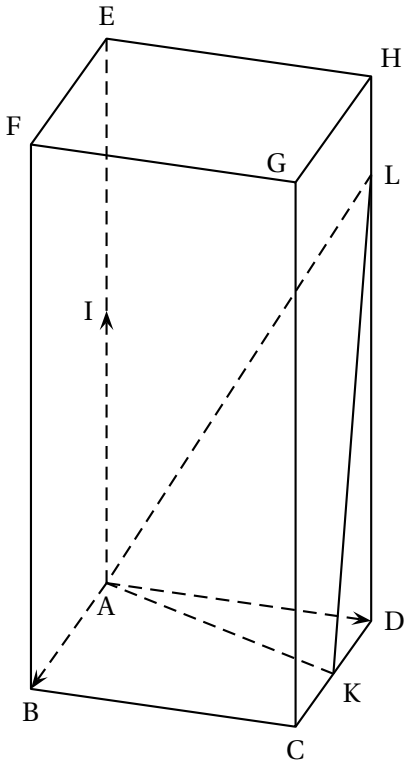
C. la plus grande valeur de n telle que $u_n \geqslant 45$.

EXERCICE 2 — 5 points

Commun à tous les candidats

On considère un pavé droit ABCDEFGH tel que AB = AD = 1 et AE = 2, représenté ci-dessous.

Le point I est le milieu du segment [AE]. Le point K est le milieu du segment [DC]. Le point L est défini par : $\overrightarrow{\text{DL}} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{\text{AI}}$. N est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).



On se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AD}},\,\overrightarrow{\text{AI}}\right)$.

On admet que le point L a pour coordonnées $\left(0\,;\,1\,;\,\dfrac{3}{2}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{AK}}$ et $\overrightarrow{\text{AL}}$.

2. **a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(6\,;\,-3\,;\,2)$ est un vecteur normal au plan (AKL).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (AKL).

c. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (AKL).

d. En déduire que le point N de coordonnées $\left(\dfrac{18}{49}\,;\,\dfrac{40}{49}\,;\,\dfrac{6}{49}\right)$ est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).

On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$

3. **a.** Calculer le volume du tétraèdre ADKL en utilisant le triangle ADK comme base.

b. Calculer la distance du point D au plan (AKL).

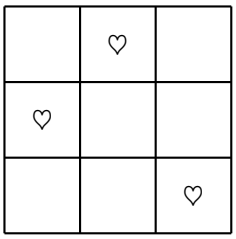
c. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle AKL.

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Une société de jeu en ligne propose une nouvelle application pour smartphone nommée « Tickets coeurs! ».

Chaque participant génère sur son smartphone un ticket comportant une grille de taille 3×3 sur laquelle sont placés trois cœurs répartis au hasard, comme par exemple ci-dessous.



Le ticket est gagnant si les trois cœurs sont positionnés côte à côte sur une même ligne, sur une même colonne ou sur une même diagonale.

1. Justifier qu'il y a exactement 84 façons différentes de positionner les trois cœurs sur une grille.
2. Montrer que la probabilité qu'un ticket soit gagnant est égale à $\frac{2}{21}$.
3. Lorsqu'un joueur génère un ticket, la société prélève 1 €sur son compte en banque. Si le ticket est gagnant, la société verse alors au joueur 5 €. Le jeu est-il favorable au joueur ?
4. Un joueur décide de générer 20 tickets sur cette application. On suppose que les générations des tickets sont indépendantes entre elles.
   a. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui compte le nombre de tickets gagnants parmi les 20 tickets générés.
   b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, de l'évènement $(X = 5)$.
   c. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, de l'évènement $(X \geqslant 1)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE au choix du candidat **5 points**

Le candidat doit traiter UN SEUL des deux exercices A ou B

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B

EXERCICE – A

Principaux domaines abordés
– Suites
– Équations différentielles

Dans cet exercice, on s'intéresse à la croissance du bambou Moso de taille maximale 20 mètres.
Le modèle de croissance de Ludwig von Bertalanffy suppose que la vitesse de croissance pour un tel bambou est proportionnelle à l'écart entre sa taille et la taille maximale.

Partie I : modèle discret

Dans cette partie, on observe un bambou de taille initiale 1 mètre.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la taille, en mètre, du bambou n jours après le début de l'observation. On a ainsi $u_0 = 1$.
Le modèle de von Bertalanffy pour la croissance du bambou entre deux jours consécutifs se traduit par l'égalité :

$$u_{n+1} = u_n + 0{,}05\,(20 - u_n) \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1. Vérifier que $u_1 = 1{,}95$.
2. a. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 1$.

b. On pose pour tout entier naturel n, $v_n = 20 - u_n$.
Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le terme initial v_0 et la raison.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 20 - 19 \times 0{,}95^n$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie II : modèle continu

Dans cette partie, on souhaite modéliser la taille du même bambou Moso par une fonction donnant sa taille, en mètre, en fonction du temps t exprimé en jour.
D'après le modèle de von Bertalanffy, cette fonction est solution de l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' = 0{,}05(20 - y)$$

où y désigne une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et y' désigne sa fonction dérivée.
Soit la fonction L définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$L(t) = 20 - 19\,\mathrm{e}^{\,-0{,}05t}.$$

1. Vérifier que la fonction L est une solution de (E) et qu'on a également $L(0) = 1$.

2. On prend cette fonction L comme modèle et on admet que, si on note L' sa fonction dérivée, $L'(t)$ représente la vitesse de croissance du bambou à l'instant t.

a. Comparer $L'(0)$ et $L'(5)$.

b. Calculer la limite de la fonction dérivée L' en $+\infty$.
Ce résultat est-il en cohérence avec la description du modèle de croissance exposé au début de l'exercice ?

EXERCICE – B

Principaux domaines abordés
– Suites, étude de fonction
– Fonction logarithme

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln(x-1).$$

On considère la suite (u_n) de terme initial $u_0 = 10$ et telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

Partie I :

La feuille de calcul ci-dessous a permis d'obtenir des valeurs approchées des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	10
3	1	7,802 775 42
4	2	5,885 444 74
5	3	4,299 184 42
6	4	3,105 509 13
7	5	2,360 951 82
8	6	2,052 767 5
9	7	2,001 345 09
10	8	2,000 000 9

1. Quelle formule a été saisie dans la cellule B3 pour permettre le calcul des valeurs approchées de (u_n) par recopie vers le bas ?
2. À l'aide de ces valeurs, conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

Partie II :

On rappelle que la fonction f est définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln(x-1).$$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. On admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. **a.** Soit f' la fonction dérivée de f. Montrer que pour tout $x \in]1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$.
   b. En déduire le tableau des variations de f sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$, complété par les limites.
   c. Justifier que pour tout $x \geqslant 2$, $f(x) \geqslant 2$.

Partie III :

1. En utilisant les résultats de la partie II, démontrer par récurrence que $u_n \geqslant 2$ pour tout entier naturel n.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
4. On admet que ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$. Donner la valeur de ℓ.

Baccalauréat Centres étrangers 9 juin 2021

Candidats libres Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Ceci est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations est exacte.
Le candidat recopiera sur sa copie le numéro de la question et la réponse correspondante.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

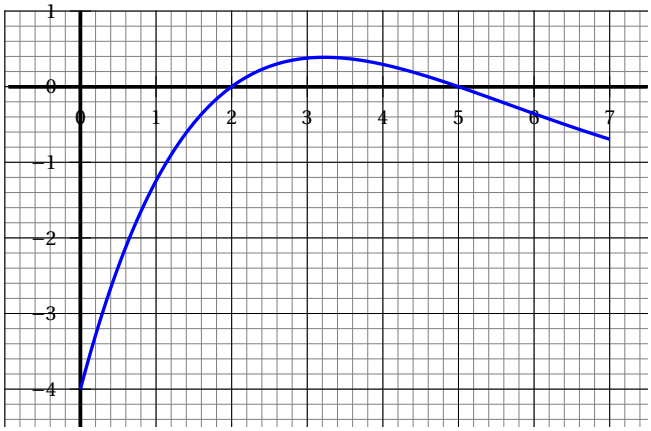
On note f'' la dérivée seconde de la fonction f.
Quel que soit le réel x, $f''(x)$ est égal à :

a. $(1-2x)\,\mathrm{e}^{-2x}$ **b.** $4(x-1)\,\mathrm{e}^{-2x}$ **c.** $4\,\mathrm{e}^{-2x}$ **d.** $(x+2)\,\mathrm{e}^{-2x}$

2. Un élève de première générale choisit trois spécialités parmi les douze proposées.
Le nombre de combinaisons possibles est :

a. 1 728 **b.** 1 320 **c.** 220 **d.** 33

3. On donne ci-dessous la représentation graphique de f' fonction dérivée d'une fonction f définie sur $[0\,;7]$.



Le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\,;7]$ est :

a.

x	0		3,25		7
$f(x)$		↗		↘	

b.

x	0		2		5		7
$f(x)$		↘		↗		↘	

c.

x	0		2		5		7
$f(x)$		↗		↘		↗	

d.

x	0		2		7
$f(x)$		↗		↘	

4. Une entreprise fabrique des cartes à puces. Chaque puce peut présenter deux défauts notés A et B.

Une étude statistique montre que 2,8 % des puces ont le défaut A, 2,2 % des puces ont le défaut B et, heureusement, 95,4 % des puces n'ont aucun des deux défauts.

La probabilité qu'une puce prélevée au hasard ait les deux défauts est :

a. 0,05 **b.** 0,004 **c.** 0,046 **d.** On ne peut pas le savoir

5. On se donne une fonction f, supposée dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.

On donne ci-dessous le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

D'après ce tableau de variation :

a. f' est positive sur $\mathbb{R}$.

b. f' est positive sur $]-\infty\,;\,-1]$

c. f' est négative sur $\mathbb{R}$

d. f' est positive sur $[-1\,;\,+\infty[$

EXERCICE 2 — 5 points

Commun à tous les candidats

Dans tout cet exercice, les probabilités seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-3}.
D'après une étude, les utilisateurs réguliers de transports en commun représentent 17 % de la population française.
Parmi ces utilisateurs réguliers, 32 % sont des jeunes âgés de 18 à 24 ans. (Source : TNS-Sofres)

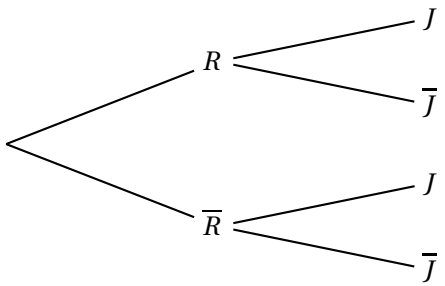
Partie A :

On interroge une personne au hasard et on note :

— R l'évènement : « La personne interrogée utilise régulièrement les transports en commun ».

— J l'évènement : « La personne interrogée est âgée de 18 à 24 ans ».

1. Représentez la situation à l'aide de cet arbre pondéré, que vous recopierez sur votre copie, en y reportant les données de l'énoncé.



2. Calculer la probabilité $P(R \cap J)$.
3. D'après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11 % de la population française.
   Montrer que la probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas régulièrement les transports en commun est 0,056 à 10^{-3} près.
4. En déduire la proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun.

Partie B :

Lors d'un recensement sur la population française, un recenseur interroge au hasard 50 personnes en une journée sur leur pratique des transports en commun.
La population française est suffisamment importante pour assimiler ce recensement à un tirage avec remise.
Soit X la variable aléatoire dénombrant les personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de X et préciser ses paramètres.
2. Calculer $P(X = 5)$ et interpréter le résultat.
3. Le recenseur indique qu'il y a plus de 95 % de chance pour que, parmi les 50 personnes interrogées, moins de 13 d'entre elles utilisent régulièrement les transports en commun.
   Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier votre réponse.
4. Quel est le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées ?

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable.
Elle propose alors à ses 5 000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.
En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.
Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85 % de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.
On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n).
Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n-ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

Partie A :

1. Calculer a_1.
2. Justifier que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}85a_n + 450$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3000$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,85.
   b. Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = -2800 \times 0{,}85^n + 3000$.
4. Déterminer le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2 500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.

Partie B :

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

1. Démontrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel
$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4.$$
   b. Justifier que la suite (u_n) est convergente.
3. On admet que pour tout entier naturel n,
$$0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$
   En déduire la limite de la suite (u_n) et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.

EXERCICE AU CHOIX DU CANDIDAT **5 points**

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

EXERCICE A - Géométrie dans l'espace

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants :

$$\text{A}(2\ ;\ -1\ ;\ 0), \text{B}(3\ ;\ -1\ ;\ 2), \text{C}(0\ ;\ 4\ ;\ 1) \text{ et } \text{S}(0\ ;\ 1\ ;\ 4).$$

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
2. a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

c. Montrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

3. Soit (d) la droite orthogonale au plan (ABC) passant par S. Elle coupe le plan (ABC) en H.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).

b. Montrer que les coordonnées du point H sont H$(2\,;2\,;3)$.

4. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est $V = \dfrac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

Calculer le volume du tétraèdre SABC.

5. **a.** Calculer la longueur SA.

b. On indique que SB $= \sqrt{17}$.

En déduire une mesure de l'angle $\widehat{\text{ASB}}$ approchée au dixième de degré.

EXERCICE B - Équations différentielles

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2\,\text{e}^{\frac{-1}{3}x} + \frac{2}{3}x - 2.$$

1. On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa fonction dérivée. Montrer que, pour tout réel x :

$$g'(x) = \frac{-2}{3}\text{e}^{-\frac{1}{3}x} + \frac{2}{3}.$$

2. En déduire le sens de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer le signe de $g(x)$, pour tout x réel.

Partie B :

1. On considère l'équation différentielle

$$(E) : \qquad 3y' + y = 0.$$

Résoudre l'équation différentielle (E).

2. Déterminer la solution particulière dont la courbe représentative, dans un repère du plan, passe par le point M$(0\,;2)$.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2\text{e}^{-\frac{1}{3}x}$$

et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

a. Montrer que la tangente (Δ_0) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point M$(0\,;2)$ admet une équation de la forme :

$$y = -\frac{2}{3}x + 2.$$

b. Étudier, sur $\mathbb{R}$, la position de cette courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la tangente (Δ_0).

Partie C :

1. Soit A le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a, a réel quelconque.
Montrer que la tangente (Δ_a) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A coupe l'axe des abscisses en un point P d'abscisse $a+3$.

2. Expliquer la construction de la tangente (Δ_{-2}) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse -2.

Corrigé du baccalauréat Centres étrangers 10 juin 2021

Candidats libres Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des cinq questions, quatre réponses sont proposées ; une seule de ces réponses est exacte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte sans justifier le choix effectué.
Barème : une bonne réponse rapporte un point. Une réponse inexacte ou une absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

Question 1 :

On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x^2 + 2x - \dfrac{3}{x}$.
Une équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 1 est :

a. $y = 7(x-1)$	**b.** $y = x - 1$	**c.** $y = 7x + 7$	**d.** $y = x + 1$

Question 2 :

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{3n}{n+2}$. On cherche à déterminer la limite de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$	**b.** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$	**c.** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{3}{2}$	**d.** On ne peut pas la déterminer

Question 3 :

Dans une urne il y a 6 boules noires et 4 boules rouges. On effectue successivement 10 tirages aléatoires avec remise. Quelle est la probabilité (à 10^{-4} près) d'avoir 4 boules noires et 6 boules rouges ?

a. 0,166 2	**b.** 0,4	**c.** 0,111 5	**d.** 0,888 6

Question 4 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\,\mathrm{e}^{\,x} - x$.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$	**b.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	**c.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	**d.** On ne peut pas déterminer la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$

/indexlimite de fonction

Question 5 :
Un code inconnu est constitué de 8 signes.
Chaque signe peut être une lettre ou un chiffre. Il y a donc 36 signes utilisables pour chacune des positions.
Un logiciel de cassage de code teste environ cent millions de codes par seconde. En combien de temps au maximum le logiciel peut-il découvrir le code ?

a. environ 0,3 seconde	**b.** environ 8 heures	**c.** environ 3 heures	**d.** environ 470 heures

EXERCICE 2 — 5 points

Commun à tous les candidats

Au 1er janvier 2020, la centrale solaire de Big Sun possédait 10 560 panneaux solaires.
On observe, chaque année, que 2 % des panneaux se sont détériorés et nécessitent d'être retirés tandis que 250 nouveaux panneaux solaires sont installés.

Partie A - Modélisation à l'aide d'une suite

On modélise l'évolution du nombre de panneaux solaires par la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\,560$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}98u_n + 250$, où u_n est le nombre de panneaux solaires au 1er janvier de l'année $2020 + n$.

1. **a.** Expliquer en quoi cette modélisation correspond à la situation étudiée.

b. On souhaite savoir au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires sera strictement supérieur à 12 000.

À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

c. Recopier et compléter le programme en Python ci-dessous de sorte que la valeur cherchée à la question précédente soit stockée dans la variable n à l'issue de l'exécution de ce dernier.

```
u = 10560
n= 0
while ..... :
    u = ......
    n = ......
```

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant 12\,500$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4. En déduire que la suite (u_n) converge. Il n'est pas demandé, ici, de calculer sa limite.

5. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 12\,500$, pour tout entier naturel n.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,98 dont on précisera le premier terme.

b. Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

c. En déduire, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

d. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Interpréter ce résultat dans le contexte du modèle.

Partie B - Modélisation à l'aide d'une fonction

Une modélisation plus précise a permis d'estimer le nombre de panneaux solaires de la centrale à l'aide de la fonction f définie pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 12\,500 - 500\,\mathrm{e}^{\,-0{,}02x+1{,}4},$$

où x représente le nombre d'années écoulées depuis le 1er janvier 2020.

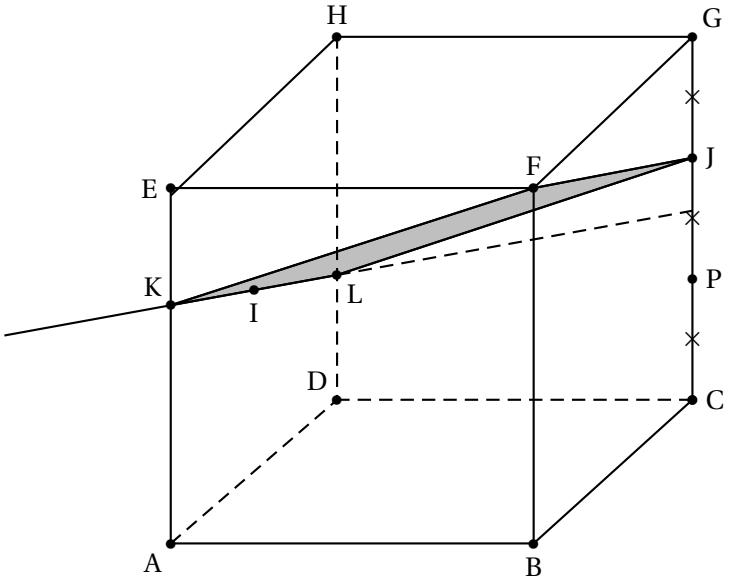
1. Étudier le sens de variation de la fonction f.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. En utilisant ce modèle, déterminer au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires dépassera 12 000.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

ABCDEFGH est un cube. I est le centre de la face ADHE et J est un point du segment [CG].
Il existe donc $a \in [0\,;\,1]$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{CJ}} = a\overrightarrow{\mathrm{CG}}$.
On note (d) la droite passant par I et parallèle à (FJ).
On note K et L les points d'intersection de la droite (d) et des droites (AE) et (DH).
On se place dans le repère $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

Partie A : Dans cette partie $a = \dfrac{2}{3}$



1. Donner les coordonnées des points F, I et J.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).
3. **a.** Montrer que le point de coordonnées $\left(0\,;\,0\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$ est le point K.
   b. Déterminer les coordonnées du point L, intersection des droites (d) et (DH).
4. **a.** Démontrer que le quadrilatère FJLK est un parallélogramme.
   b. Démontrer que le quadrilatère FJLK est un losange.

c. Le quadrilatère FJLK est-il un carré ?

Partie B : Cas général

On admet que les coordonnées des points K et L sont : $\text{K}\left(0\ ;\ 0\ ;\ 1-\dfrac{a}{2}\right)$ et $\text{L}\left(0\ ;\ 1\ ;\ \dfrac{a}{2}\right)$.
On rappelle que $a \in [0\ ;\ 1]$.

1. Déterminer les coordonnées de J en fonction de a.
2. Montrer que le quadrilatère FJLK est un parallélogramme.
3. Existe-t-il des valeurs de a telles que le quadrilatère FJLK soit un losange ? Justifier.
4. Existe-t-il des valeurs de a telles que le quadrilatère FJLK soit un carré ? Justifier.

EXERCICE AU CHOIX DU CANDIDAT **5 points**
Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

EXERCICE A - Fonction ln

Partie A :

Dans un pays, une maladie touche la population avec une probabilité de 0,05.
On possède un test de dépistage de cette maladie.
On considère un échantillon de n personnes ($n \geqslant 20$) prises au hasard dans la population assimilé à un tirage avec remise.
On teste l'échantillon suivant cette méthode : on mélange le sang de ces n individus, on teste le mélange.
Si le test est positif, on effectue une analyse individuelle de chaque personne.
Soit X_n la variable aléatoire qui donne le nombre d'analyses effectuées.

1. Montrer X_n prend les valeurs 1 et $(n+1)$.
2. Prouver que $P(X_n = 1) = 0{,}95^n$.
   Établir la loi de X_n en recopiant sur la copie et en complétant le tableau suivant :

x_i	1	$n+1$
$P(X_n = x_i)$		

3. Que représente l'espérance de X_n dans le cadre de l'expérience ?
   Montrer que $E(X_n) = n + 1 - n \times 0{,}95^n$.

Partie B :

1. On considère la fonction f définie sur $[20\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + x\ln(0{,}95)$.
   Montrer que f est décroissante sur $[20\ ;\ +\infty[$.
2. On rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
3. Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution a sur $[20\ ;\ +\infty[$.
   Donner un encadrement à 0,1 près de cette solution.
4. En déduire le signe de f sur $[20\ ;\ +\infty[$.

Partie C :

On cherche à comparer deux types de dépistages.
La première méthode est décrite dans la partie A, la seconde, plus classique, consiste à tester tous les individus.
La première méthode permet de diminuer le nombre d'analyses dès que $E(X_n) < n$.
En utilisant la partie B, montrer que la première méthode diminue le nombre d'analyses pour des échantillons comportant 87 personnes maximum.

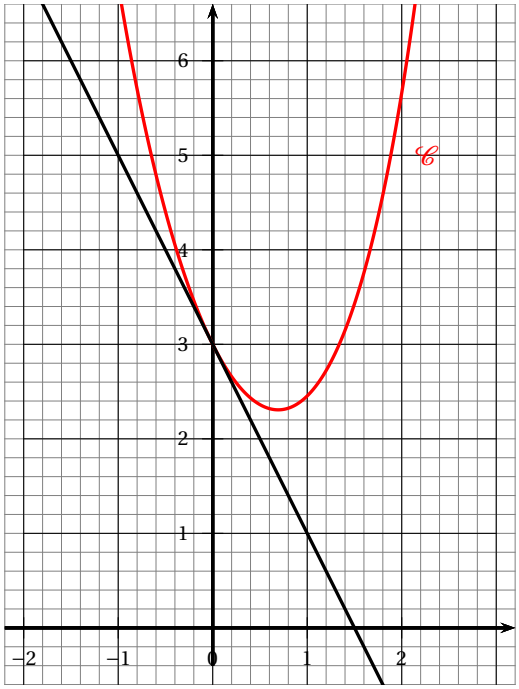
EXERCICE B - Équation différentielle

Partie A : Détermination d'une fonction f et résolution d'une équation différentielle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} + ax + b\mathrm{e}^{-x}$$

où a et b sont des nombres réels que l'on propose de déterminer dans cette partie.
Dans le plan muni d'un repère d'origine O, on a représenté ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$, représentant la fonction f, et la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.



1. Par lecture graphique, donner les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
2. En utilisant l'expression de la fonction f, exprimer $f(0)$ en fonction de b et en déduire la valeur de b.
3. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a. Donner, pour tout réel x, l'expression de $f'(x)$.
   b. Exprimer $f'(0)$ en fonction de a.
   c. En utilisant les questions précédentes, déterminer a, puis en déduire l'expression de $f(x)$.

4. On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \quad y' + y = 2\,\mathrm{e}^{\,x} - x - 1$$

a. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{\,x} - x + 2\,\mathrm{e}^{\,-x}.$$

est solution de l'équation (E).

b. Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 0$.

c. En déduire toutes les solutions de l'équation (E). est solution de l'équation (E).

Partie B : Étude de la fonction g sur $[1\,;\,+\infty[$

1. Vérifier que pour tout réel x, on a :

$$\mathrm{e}^{\,2x} - \mathrm{e}^{\,x} - 2 = \left(\mathrm{e}^{\,x} - 2\right)\left(\mathrm{e}^{\,x} + 1\right)$$

2. En déduire une expression factorisée de $g'(x)$, pour tout réel x.

3. On admettra que, pour tout $x \in [1\,;\,+\infty[$, $\mathrm{e}^{\,x} - 2 > 0$.
Étudier le sens de variation de la fonction g sur $[1\,;\,+\infty[$.

Baccalauréat Métropole 7 juin 2021

Candidats libres Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}$$

On donne l'expression de la dérivée seconde f'' de f, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f''(x) = \frac{2\,\mathrm{e}^{2x}(2x^2-2x+1)}{x^3}.$$

1. La fonction f', dérivée de f, est définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

a. $f'(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x}$ **b.** $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}(x-1)}{x^2}$

c. $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}(2x-1)}{x^2}$ **d.** $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}(1+2x)}{x^2}$.

2. La fonction f :

a. est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$ **b.** est monotone sur $]0\,;\,+\infty[$

c. admet un minimum en $\dfrac{1}{2}$ **d.** admet un maximum en $\dfrac{1}{2}$.

3. La fonction f admet pour limite en $+\infty$:

a. $+\infty$ **b.** 0 **c.** 1 **d.** e^{2x}.

4. La fonction f :

a. est concave sur $]0\,;\,+\infty[$ **b.** est convexe $]0\,;\,+\infty[$

c. est concave sur $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right]$ **d.** est représentée par une courbe admettant un point d'inflexion.

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 5 % des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses.
Un ingénieur a mis au point un test à appliquer aux pièces. Ce test a deux résultats possibles :

« positif » ou bien « négatif ».
On applique ce test à une pièce choisie au hasard dans la production de la chaîne.
On note $p(E)$ la probabilité d'un évènement E.
On considère les évènements suivants :

— D : « la pièce est défectueuse » ;

— T : « la pièce présente un test positif » ;

— $\overline{D}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les évènements contraires de D et T.

Compte tenu des caractéristiques du test, on sait que :

— La probabilité qu'une pièce présente un test positif sachant qu'elle défectueuse est égale à 0,98 ;

— la probabilité qu'une pièce présente un test négatif sachant qu'elle n'est pas défectueuse est égale à 0,97.

Les parties I et II peuvent être traitées de façon indépendante.

PARTIE I

1. Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. **a.** Déterminer la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production de la chaîne soit défectueuse et présente un test positif.

b. Démontrer que : $p(T) = 0{,}0775$.

3. On appelle **valeur prédictive positive** du test la probabilité qu'une pièce soit défectueuse sachant que le test est positif. On considère que pour être efficace, un test doit avoir une valeur prédictive positive supérieure à 0,95.

Calculer la valeur prédictive positive de ce test et préciser s'il est efficace.

PARTIE II

On choisit un échantillon de 20 pièces dans la production de la chaîne, en assimilant ce choix à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de pièces défectueuses dans cet échantillon.
On rappelle que : $p(D) = 0{,}05$.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et déterminer les paramètres de cette loi.

2. Calculer la probabilité que cet échantillon contienne au moins une pièce défectueuse.

On donnera un résultat arrondi au centième.

3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.

EXERCICE 3 **6 points**
Commun à tous les candidats

Cécile a invité des amis à déjeuner sur sa terrasse. Elle a prévu en dessert un assortiment de gâteaux individuels qu'elle a achetés surgelés.
Elle sort les gâteaux du congélateur à −19 °C et les apporte sur la terrasse où la température est de 25 °C.
Au bout de 10 minutes la température des gâteaux est de 1,3 °C.

I – Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante c'est-à-dire que l'augmentation de la température est la même minute après minute.
Selon ce modèle, déterminer quelle serait la température des gâteaux 25 minutes après leur sortie du congélateur.
Ce modèle semble-t-il pertinent ?

II – Second modèle

On note T_n la température des gâteaux en degré Celsius, au bout de n minutes après leur sortie du congélateur ; ainsi $T_0 = -19$
On admet que pour modéliser l'évolution de la température, on doit avoir la relation suivante

Pour tout entier naturel n, $T_{n+1} - T_n = -0{,}06 \times (T_n - 25)$.

1. Justifier que, pour tout entier n, on a $T_{n+1} = 0{,}94T_n + 1{,}5$

2. Calculer T_1 et T_2. On donnera des valeurs arrondies au dixième.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $T_n \leqslant 25$.
En revenant à la situation étudiée, ce résultat était-il prévisible ?

4. Étudier le sens de variation de la suite (T_n).

5. Démontrer que la suite (T_n) est convergente.

6. On pose pour tout entier naturel n, $U_n = T_n - 25$.

a. Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme U_0.

b. En déduire que pour tout entier naturel n, $T_n = -44 \times 0{,}94^n + 25$.

c. En déduire la limite de la suite (T_n). Interpréter ce résultat dans le contexte de la situation étudiée.

7. **a.** Le fabricant conseille de consommer les gâteaux au bout d'une demi-heure à température ambiante après leur sortie du congélateur.
Quelle est alors la température atteinte par les gâteaux ? On donnera une valeur arrondie à l'entier le plus proche.

b. Cécile est une habituée de ces gâteaux, qu'elle aime déguster lorsqu'ils sont encore frais, à la température de 10 °C. Donner un encadrement entre deux entiers consécutifs du temps en minutes après lequel Cécile doit déguster son gâteau.

c. Le programme suivant, écrit en langage Python, doit renvoyer après son exécution la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $T_n \geqslant 10$.

```
def seuil() :
    n=0
    T= .....
    while T .....
        T= .....
        n=n+1
    return
```

Recopier ce programme sur la copie et compléter les lignes incomplètes afin que le programme renvoie la valeur attendue.

EXERCICE au choix du candidat **5 points**

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : Exercice A ou Exercice B
Pour éclairer le choix, les principaux domaines abordés sont indiqués en début de chaque exercice.

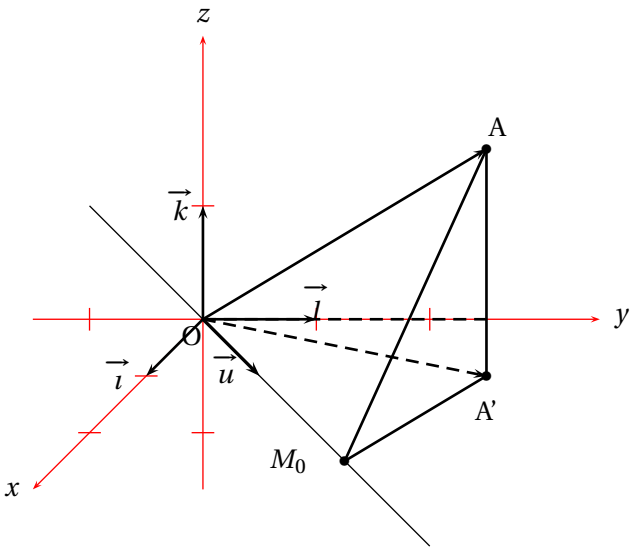
EXERCICE A .

Principaux domaines abordés :
Géométrie de l'espace rapporté à un repère orthonormé ; orthogonalité dans l'espace

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$ on considère

- le point A de coordonnées $(1\,;3\,;2)$,
- le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$
- la droite d passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur $\vec{u}$.

Le but de cet exercice est de déterminer le point de d le plus proche du point A et d'étudier quelques propriétés de ce point.
On pourra s'appuyer sur la figure ci-contre pour raisonner au fur et à mesure des questions.



1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.
2. Soit t un nombre réel quelconque, et M un point de la droite d, le point M ayant pour coordonnées $(t\,;\,t\,;\,0)$.
   a. On note AM la distance entre les points A et M. Démontrer que :
   $$AM^2 = 2t^2 - 8t + 14.$$
   b. Démontrer que le point M_0 de coordonnées $(2\,;\,2\,;\,0)$ est le point de la droite d pour lequel la distance AM est minimale.
   On admettra que la distance AM est minimale lorsque son carré AM^2 est minimal.
3. Démontrer que les droites (AM_0) et d sont orthogonales.
4. On appelle A' le projeté orthogonal du point A sur le plan d'équation cartésienne $z = 0$. Le point A' admet donc pour coordonnées $(1\,;\,3\,;\,0)$.

Démontrer que le point M_0 est le point du plan $(AA'M_0)$ le plus proche du point O, origine du repère.

5. Calculer le volume de la pyramide $OM_0A'A$.
On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathscr{B}h$, où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.

EXERCICE B

Principaux domaines abordés :
Équations différentielles ; fonction exponentielle.

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = y + 2x\,\mathrm{e}^{x}.$$

On cherche l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels qui sont solutions de cette équation.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2\,\mathrm{e}^{x}$. On admet que u est dérivable et on note u' sa fonction dérivée. Démontrer que u est une solution particulière de (E).

2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(x) - u(x)$$

a. Démontrer que si la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) alors la fonction g est solution de l'équation différentielle : $y' = y$.
On admet que la réciproque de cette propriété est également vraie.

b. À l'aide de la résolution de l'équation différentielle $y' = y$, résoudre l'équation différentielle (E).

3. . Étude de la fonction u

a. Étudier le signe de $u'(x)$ pour x variant dans $\mathbb{R}$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction u sur $\mathbb{R}$ (les limites ne sont pas demandées).

c. Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction u est concave.

Baccalauréat Métropole 8 juin 2021

Candidats libres Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.
On considère :

- La droite $\mathscr{D}$ passant par les points A(1 ; 1 ; −2) et B(−1 ; 3 ; 2).
- La droite $\mathscr{D}'$ de représentation paramétrique : $\begin{cases} x &= -4+3t \\ y &= 6-3t \\ z &= 8-6t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.
- Le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $x+my-2z+8=0$ où m est un nombre réel.

Question 1 : Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite $\mathscr{D}'$?

a. $M_1(-1\,;\,3\,;\,-2)$ **b.** $M_2(11\,;\,-9\,;\,-22)$ **c.** $M_3(-7\,;\,9\,;\,2)$ **d.** $M_4(-2\,;\,3\,;\,4)$

Question 2 : Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}'$ est :

a. $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}-4\\6\\8\end{pmatrix}$ **b.** $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}$ **c.** $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$ **d.** $\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$

Question 3 : Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont :

a. sécantes **b.** strictement parallèles **c.** non coplanaires **d.** confondues

Question 4 : La valeur du réel m pour laquelle la droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$ est :

a. $m=-1$ **a.** $m=1$ **c.** $m=5$ **d.** $m=-2$

EXERCICE 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.
La leucose féline est une maladie touchant les chats ; elle est provoquée par un virus.
Dans un grand centre vétérinaire, on estime à 40 % la proportion de chats porteurs de la maladie.
On réalise un test de dépistage de la maladie parmi les chats présents dans ce centre vétérinaire.
Ce test possède les caractéristiques suivantes.

- Lorsque le chat est porteur de la maladie, son test est positif dans 90 % des cas.
- Lorsque le chat n'est pas porteur de la maladie, son test est négatif dans 85 % des cas.

On choisit un chat au hasard dans le centre vétérinaire et on considère les évènements suivants :

- M : « Le chat est porteur de la maladie » ;
- T : « Le test du chat est positif » ;
- $\overline{M}$ et $\overline{T}$ désignent les évènements contraires des évènements M et T respectivement.

1. **a.** Traduire la situation par un arbre pondéré.

b. Calculer la probabilité que le chat soit porteur de la maladie et que son test soit positif.

c. Montrer que la probabilité que le test du chat soit positif est égale à 0,45.

d. On choisit un chat parmi ceux dont le test est positif. Calculer la probabilité qu'il soit porteur de la maladie.

2. On choisit dans le centre vétérinaire un échantillon de 20 chats au hasard. On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de chats présentant un test positif dans l'échantillon choisi.

a. Déterminer, en justifiant, la loi suivie par la variable aléatoire X.

b. Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon exactement 5 chats présentant un test positif.

c. Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon au plus 8 chats présentant un test positif.

d. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. Dans cette question, on choisit un échantillon de n chats dans le centre, qu'on assimile encore à un tirage avec remise. On note p_n la probabilité qu'il y ait au moins un chat présentant un test positif dans cet échantillon.

a. Montrer que $p_n = 1 - 0{,}55^n$.

b. Décrire le rôle du programme ci-contre écrit en langage Python, dans lequel la variable n est un entier naturel et la variable P un nombre réel.

```
def seuil() :
    n = 0
    P = 0
    while P < 0,99 :
        n = n + 1
        P = 1 - 0,55 * *n
    return n
```

c. Déterminer, en précisant la méthode employée, la valeur renvoyée par ce programme.

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 4}.$$

1.

La copie d'écran ci-contre présente les valeurs, calculées à l'aide d'un tableur, des termes de la suite (u_n) pour n variant de 0 à 12, ainsi que celles du quotient $\dfrac{4}{u_n}$, (avec, pour les valeurs de u_n, affichage de deux chiffres pour les parties décimales).

À l'aide de ces valeurs, conjecturer l'expression de $\dfrac{4}{u_n}$ en fonction de n.

Le but de cet exercice est de démontrer cette conjecture (question **5.**), et d'en déduire la limite de la suite (u_n) (question **6.**).

n	u_n	$\dfrac{4}{u_n}$
0	1,00	4
1	0,80	5
2	0,67	6
3	0,57	7
4	0,50	8
5	0,44	9
6	0,40	10
7	0,36	11
8	0,33	12
9	0,31	13
10	0,29	14
11	0,27	15
12	0,25	16

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

4. Que peut-on conclure des questions **2.** et **3.** concernant la suite (u_n) ?

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \dfrac{4}{u_n}$.

Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.

Préciser sa raison et son premier terme.

En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

6. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.

En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE AU CHOIX DU CANDIDAT **5 points**

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.
Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés dans chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A

Principaux domaines abordés :
Fonction logarithme ; dérivation

Partie 1

On désigne par h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$h(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

On admet que la fonction h est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.

1. Déterminez les limites de h en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que, pour tout nombre réel x de $]0\,;\,+\infty[$, $h'(x) = \dfrac{1-2|n(x)}{x^3}$.

3. En déduire les variations de la fonction h sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

4. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à $]0\,;\,+\infty[$ et vérifier que : $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.
5. Déterminer le signe de $h(x)$ pour x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$.

Partie 2

On désigne par f_1 et f_2 les fonctions définies sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_1(x) = x - 1 - \frac{\ln(x)}{x^2} \qquad \text{et} \qquad f_2(x) = x - 2 - \frac{2\ln(x)}{x^2}.$$

On note $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les représentations graphiques respectives de f_1 et f_2 dans un repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f_1(x) - f_2(x) = h(x).$$

2. Déduire des résultats de la Partie 1 la position relative des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
On justifiera que leur unique point d'intersection a pour coordonnées $(\alpha\,;\,\alpha)$.
On rappelle que α est l'unique solution de l'équation $h(x) = 0$.

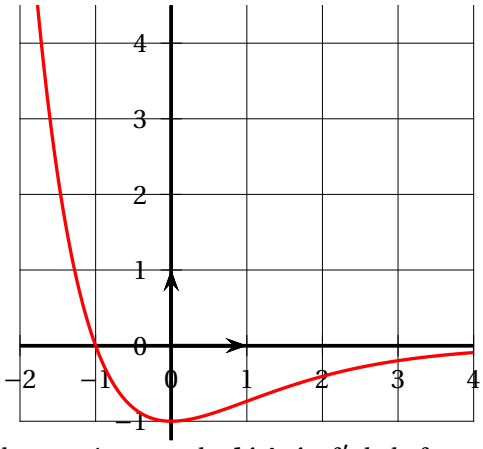
Exercice B

Principaux domaines abordés :
Fonction exponentielle ; dérivation ; convexité

Partie 1

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la fonction dérivée f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.
À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant les réponses :

1. Le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. La convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



Courbe représentant la **dérivée** f' de la fonction f.

Partie 2

On admet que la fonction f mentionnée dans la Partie 1 est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' et f'' les fonctions dérivées première et seconde de f respectivement.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x,

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^{x}} + 2\,\mathrm{e}^{-x}.$$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.

On admet que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (-x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$.

b. Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f et dresser son tableau de variations.

c. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-2\,;\,-1]$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.

3. Déterminer, pour tout nombre réel x, l'expression de $f''(x)$ et étudier la convexité de la fonction f.

Que représente pour la courbe $\mathscr{C}$ son point A d'abscisse 0 ?

Baccalauréat Métropole 13 septembre 2021

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Candidats libres

Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

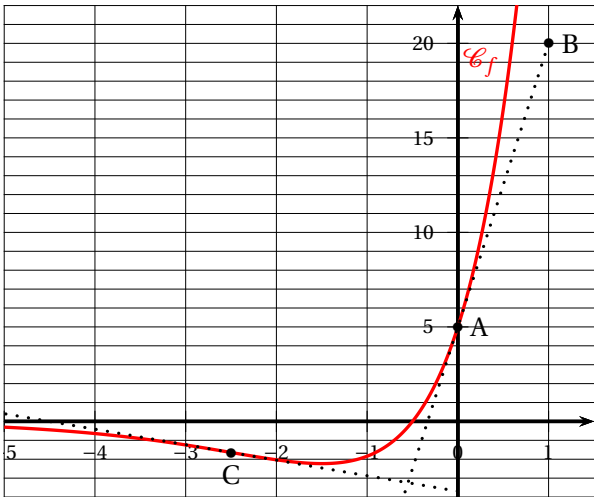
EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Le graphique ci-contre donne la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On notera f' la fonction dérivée de f.
On donne les points A de coordonnées $(0\,;\,5)$ et B de coordonnées $(1\,;\,20)$. Le point C est le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse $-2{,}5$. La droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.

Les questions 1 à 3 se rapportent à cette même fonction f.



1. On peut affirmer que :
- **a.** $f'(-0{,}5) = 0$
- **b.** si $x \in]-\infty\,;\,-0{,}5[$, alors $f'(x) < 0$
- **c.** $f'(0) = 15$
- **d.** la fonction dérivée f' ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$.

2. On admet que la fonction f représentée ci-dessus est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^x$, où a et b sont deux nombres réels et que sa courbe coupe l'axe des abscisses en son point de coordonnées $(-0{,}5\,;\,0)$.
On peut affirmer que :
- **a.** $a = 10$ et $b = 5$
- **b.** $a = 2{,}5$ et $b = -0{,}5$
- **c.** $a = -1{,}5$ et $b = 5$
- **d.** $a = 0$ et $b = 5$

3. On admet que la dérivée seconde de la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f''(x) = (10x+25)\mathrm{e}^x.$$

On peut affirmer que :

a. La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$
b. La fonction f est concave sur $\mathbb{R}$
c. Le point C est l'unique point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$
d. $\mathscr{C}_f$ n'admet pas de point d'inflexion

4. On considère deux suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ telles que :

- pour tout entier naturel n, $U_n \leqslant V_n$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 2$.

On peut affirmer que :

a. la suite (U_n) converge
b. pour tout entier naturel n, $V_n \leqslant 2$
c. la suite (U_n) diverge
d. la suite (U_n) est majorée

Exercice 2, commun à tous les candidats **5 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{4x}{1+3x}$$

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Calculer u_1.

2. On admet que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$.

a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
c. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.

3. **a.** Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous qui, pour tout réel positif E, détermine la plus petite valeur P tel que : $1 - u_P < E$.

```
def seuil(E) :
    u = 0,5
    n = 0
    while .....
        u = .....
        n = n + 1
    return n
```

b. Donner la valeur renvoyée par ce programme dans le cas où $E = 10^{-4}$.

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$$

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 4.
En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{v_n}{v_n + 1}$.

c. Montrer alors que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = \frac{1}{1 + 0{,}25^n}.$$

Retrouver par le calcul la limite de la suite (u_n).

Exercice 3, commun à tous les candidats **6 points**

Dans le parc national des Pyrénées, un chercheur travaille sur le déclin d'une espèce protégée dans les lacs de haute-montagne : le « crapaud accoucheur ».
Les parties I et II peuvent être abordées de façon indépendante.

Partie I : Effet de l'introduction d'une nouvelle espèce.

Dans certains lacs des Pyrénées, des truites ont été introduites par l'homme afin de permettre des activités de pêche en montagne. Le chercheur a étudié l'impact de cette introduction sur la population de crapauds accoucheurs d'un lac.
Ses études précédentes l'amènent à modéliser l'évolution de cette population en fonction du temps par la fonction f suivante :

$$f(t) = \left(0{,}04t^2 - 8t + 400\right)\mathrm{e}^{\frac{t}{50}} + 40 \text{ pour } t \in [0\,;\,120]$$

La variable t représente le temps écoulé, en jour, à partir de l'introduction à l'instant $t = 0$ des truites dans le lac, et $f(t)$ modélise le nombre de crapauds à l'instant t.

1. Déterminer le nombre de crapauds présents dans le lac lors de l'introduction des truites.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,120]$ et on note f' sa fonction dérivée.

Montrer, en faisant apparaitre les étapes du calcul, que pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,120]$ on a :

$$f'(t) = t(t - 100)\mathrm{e}^{\frac{t}{50}} \times 8 \times 10^{-4}.$$

3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,120]$, puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle (on donnera des valeurs approchées au centième).

4. Selon cette modélisation :

a. Déterminer le nombre de jours J nécessaires afin que le nombre de crapauds atteigne son minimum. Quel est ce nombre minimum ?

b. Justifier que, après avoir atteint son minimum, le nombre de crapauds dépassera un jour 140 individus.

c. À l'aide de la calculatrice, déterminer la durée en jour à partir de laquelle le nombre de crapauds dépassera 140 individus.

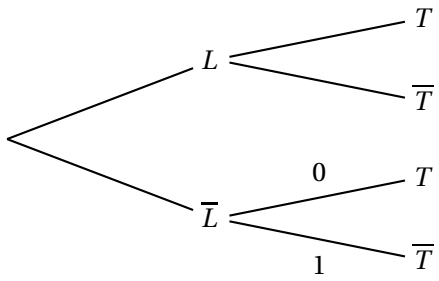
Partie II : Effet de la Chytridiomycose sur une population de têtards

Une des principales causes du déclin de cette espèce de crapaud en haute montagne est une maladie, la « Chytridiomycose », provoquée par un champignon.
Le chercheur considère que :

- Les trois quarts des lacs de montagne des Pyrénées ne sont pas infectés par le champignon, c'est-à-dire qu'ils ne contiennent aucun têtard (larve du crapaud) contaminé.
- Dans les lacs restants, la probabilité qu'un têtard soit contaminé est de 0,74.

Le chercheur choisit au hasard un lac des Pyrénées, et y procède à des prélèvements.
Pour la suite de l'exercice, les résultats seront arrondis au millième lorsque cela est nécessaire.
Le chercheur prélève au hasard un têtard du lac choisi afin d'effectuer un test avant de le relâcher.
On notera T l'évènement « Le têtard est contaminé par la maladie » et L l'évènement « Le lac est infecté par le champignon ».
On notera $\overline{L}$ l'évènement contraire de L et $\overline{T}$ l'évènement contraire de T.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant en utilisant les données de l'énoncé :



2. Montrer que la probabilité $P(T)$ que le têtard prélevé soit contaminé est de 0,185.

3. Le têtard n'est pas contaminé. Quelle est la probabilité que le lac soit infecté ?

Exercice au choix du candidat **5 points**

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.
Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A

Principaux domaines abordés :
Géométrie de l'espace rapporté à un repère orthonormé.

On considère le cube ABCDEFGH donné en annexe.
On donne trois points I, J et K vérifiant :

$$\overrightarrow{\text{RI}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{EH}}, \qquad \overrightarrow{\text{EJ}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{EF}}, \qquad \overrightarrow{\text{BK}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{BF}}$$

Les points I, J et K sont représentés sur la figure donnée en annexe, à compléter et à rendre avec la copie.
On se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AD}},\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

1. Donner sans justification les coordonnées des points I, J et K.

2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{\text{AG}}$ est normal au plan (IJK).

3. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est $4x+4y+4z-5=0$.

4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BC).

5. En déduire les coordonnées du point L, point d'intersection de la droite (BC) avec le plan (IJK).
6. Sur la figure en annexe, placer le point L et construire l'intersection du plan (IJK) avec la face (BCGF).
7. Soit $M\left(\frac{1}{4}\ ;\ 1\ ;\ 0\right)$. Montrer que les points I, J, L et M sont coplanaires.

Exercice B

Principaux domaines abordés :
Fonction logarithme.

Partie I

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$h(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x}.$$

1. Déterminer la limite de la fonction h en 0.
2. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$.
3. On note h' la fonction dérivée de h. Démontrer que, pour tout nombre réel x de $]0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$h'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

4. Dresser le tableau de variations de la fonction h sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
5. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0\ ;\ +\infty[$. Justifier que l'on a : $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$.

Partie II

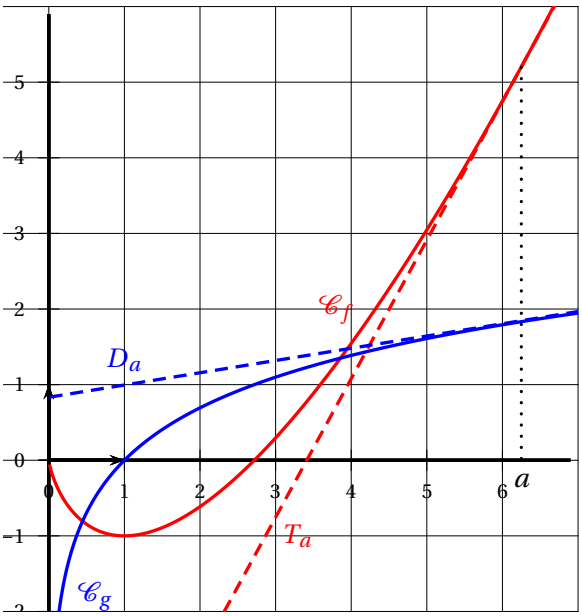
Dans cette partie, on considère les fonctions f et g définies sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x) - x; \qquad g(x) = \ln(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentant respectivement les fonctions f et g dans un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$.
Pout tout nombre réel a strictement positif, on appelle :

- T_a la tangente à $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse a ;
- D_a la tangente à $\mathscr{C}_g$ en son point d'abscisse a.

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ainsi que deux tangentes T_a et D_a sont représentées ci-dessous.



On recherche d'éventuelles valeurs de a pour lesquelles les droites T_a et D_a sont perpendiculaires.
Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

1. Justifier que la droite D_a a pour coefficient directeur $\dfrac{1}{a}$.

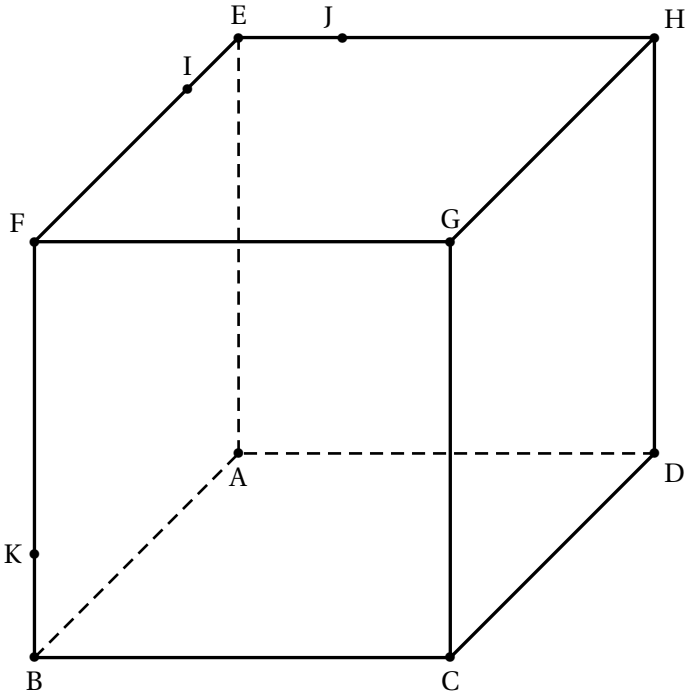
2. Justifier que la droite T_a a pour coefficient directeur $\ln(a)$.

On rappelle que dans un repère orthonormé, deux droites de coefficients directeurs respectifs m et m'sont perpendiculaires si et seulement si $mm' = -1$.

3. Démontrer qu'il existe une unique valeur de a, que l'on identifiera, pour laquelle les droites T_a et D_a sont perpendiculaires.

ANNEXE À COMPLÉTER ET À RENDRE AVEC LA COPIE

À COMPLÉTER SEULEMENT PAR LES ÉLÈVES AYANT CHOISI DE TRAITER L'EXERCICE A



Baccalauréat Métropole 13 septembre 2021 J2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Candidats libres

Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Une entreprise reçoit quotidiennement de nombreux courriels (courriers électroniques). Parmi ces courriels, 8 % sont du « spam », c'est-à-dire des courriers à intention publicitaire, voire malveillante, qu'il est souhaitable de ne pas ouvrir.
On choisit au hasard un courriel reçu par l'entreprise.
Les propriétés du logiciel de messagerie utilisé dans l'entreprise permettent d'affirmer que :

- La probabilité que le courriel choisi soit classé comme « indésirable » sachant que c'est un spam est égale à 0,9.
- La probabilité que le courriel choisi soit classé comme « indésirable » sachant que ce n'est pas un spam est égale à 0,01.

On note :

- S l'évènement « le courriel choisi est un spam » ;
- I l'évènement « le courriel choisi est classé comme indésirable par le logiciel de messagerie ».
- $\overline{S}$ et $\overline{I}$ les évènements contraires de S et I respectivement.

1. Modéliser la situation étudiée par un arbre pondéré, sur lequel on fera apparaître les probabilités associées à chaque branche.

2. **a.** Démontrer que la probabilité que le courriel choisi soit un message de spam et qu'il soit classé indésirable est égale à 0,072.

b. Calculer la probabilité que le message choisi soit classé indésirable.

c. Le message choisi est classé comme indésirable. Quelle est la probabilité que ce soit effectivement un message de spam ? On donnera un résultat arrondi au centième.

3. On choisit au hasard 50 courriels parmi ceux reçus par l'entreprise. On admet que ce choix se ramène à un tirage au hasard avec remise de 50 courriels parmi l'ensemble des courriels reçus par l'entreprise.

On appelle Z la variable aléatoire dénombrant les courriels de spam parmi les 50 choisis.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire Z, et quels sont ses paramètres ?

b. Quelle est la probabilité que, parmi les 50 courriels choisis, deux au moins soient du spam ? On donnera un résultat arrondi au centième.

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$, on considère les points A(1 ; 0 ; 2), B(2 ; 1 ; 0), C(0 ; 1 ; 2) et la droite Δ dont une représentation paramétrique est :
$\begin{cases} x &= 1+2t \\ y &= -2+t \\ z &= 4-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

1. Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite Δ ?

Réponse A : M(2 ; 1 ; −1) ; **Réponse B :** N(−3 ; −4 ; 6) ;
Réponse C : P(−3 ; −4 ; 2) ; **Réponse D :** Q(−5 ; −5 ; 1).

2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ admet pour coordonnées :

Réponse A : $\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$; **Réponse B :** $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

Réponse C : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ **Réponse D :** $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

Réponse A : $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ **Réponse B :** $\begin{cases} x = 2-t \\ y = 1-t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Réponse C : $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ **Réponse D :** $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 2-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

4. Une équation cartésienne du plan passant par le point C et orthogonal à la droite Δ est :

Réponse A : $x-2y+4z-6=0$; **Réponse B :** $2x+y-z+1=0$;
Réponse C : $2x+y-z-1=0$; **Réponse D :** $y+2z-5=0$.

5. On considère le point D défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.

Réponse A : $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires ; **Réponse B :** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$;
Réponse C : D a pour coordonnées (3 ; −1 ; −1) ; **Réponse D :** les points A, B, C et D sont alignés.

EXERCICE 3 **6 points**
Commun à tous les candidats

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \mathrm{e}^{-2x}.$$

On appelle Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
4. Déduire des questions précédentes le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie II

Dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$, on appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

La courbes $\mathscr{C}$ et la courbe Γ (qui représente la fonction f de la Partie I) sont tracées sur le **graphique donné en annexe qui est à compléter et à rendre avec la copie.**

Le but de cette partie est de déterminer le point de la courbe $\mathscr{C}$ le plus proche de l'origine O du repère et d'étudier la tangente à $\mathscr{C}$ en ce point.

1. Pour tout nombre réel t, on note M le point de coordonnées $\left(t\,;\,\mathrm{e}^{-t}\right)$ de la courbe $\mathscr{C}$.

   On considère la fonction h qui, au nombre réel t, associe la distance OM.

   On a donc : $h(t) = \mathrm{O}M$, c'est-à-dire :

   $$h(t) = \sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}$$

   a. Montrer que, pour tout nombre réel t,

   $$h'(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}}.$$

   où f désigne la fonction étudiée dans la **Partie I**.

   b. Démontrer que le point A de coordonnées $(\alpha\,;\,\mathrm{e}^{-\alpha})$ est le point de la courbe $\mathscr{C}$ pour lequel la longueur OM est minimale.

   Placer ce point sur le **graphique donné en annexe, à rendre avec la copie**.

2. On appelle T la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}$.

   a. Exprimer en fonction de α le coefficient directeur de la tangente T.

   On rappelle que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal à $\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{\alpha}$.

   On rappelle également le résultat suivant qui pourra être utilisé sans démonstration :

   Dans un repère orthonormé du plan, deux droites D et D′ de coefficients directeurs respectifs m et m′ sont perpendiculaires si, et seulement si le produit mm' est égal à -1.

b. Démontrer que la droite (OA) et la tangente T sont perpendiculaires.
Tracer ces droites sur le **graphique donné en annexe, à rendre avec la copie.**

EXERCICE au choix du candidat **5 points**

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés dans chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A

Principaux domaines abordés :
Suites numériques ; raisonnement par récurrence.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 16 \quad ; \quad v_0 = 5 \, ;$$

et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \\ v_{n+1} &= \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et v_1.

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = u_n - v_n$.

a. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 0,1.
En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de w_n en fonction de n.

b. Préciser le signe de la suite (w_n) et la limite de cette suite.

3. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = -0{,}4w_n$.

b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est croissante. On admet ce résultat, et on remarque qu'on a alors : pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant v_0 = 5$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 5$.
En déduire que la suite (u_n) est convergente. On appelle ℓ la limite de (u_n).

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est convergente. On admet ce résultat, et on appelle ℓ' la limite de (v_n).

4. **a.** Démontrer que $\ell = \ell'$.

b. On considère la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par : $c_n = 5u_n + 4v_n$.
Démontrer que la suite (c_n) est constante, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, on a : $c_{n+1} = c_n$.
En déduire que, pour tout entier naturel n , $c_n = 100$.

c. Déterminer la valeur commune des limites ℓ et ℓ'.

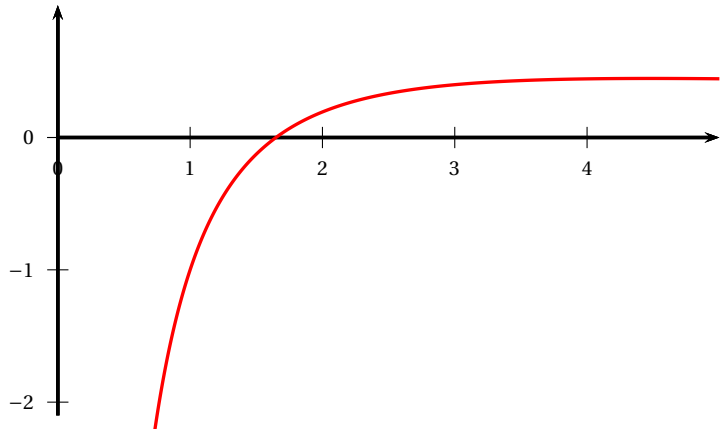
Exercice B

Principaux domaines abordés :
Fonction logarithme, limites, dérivation.

Partie 1

Le graphique ci-dessous donne la représentation graphique dans un repère orthonormé de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2\ln(x) - 1}{x}.$$



1. Déterminer par le calcul l'unique solution α de l'équation $f(x) = 0$.
   On donnera la valeur exacte de α ainsi que la valeur arrondie au centième.
2. Préciser, par lecture graphique, le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie II

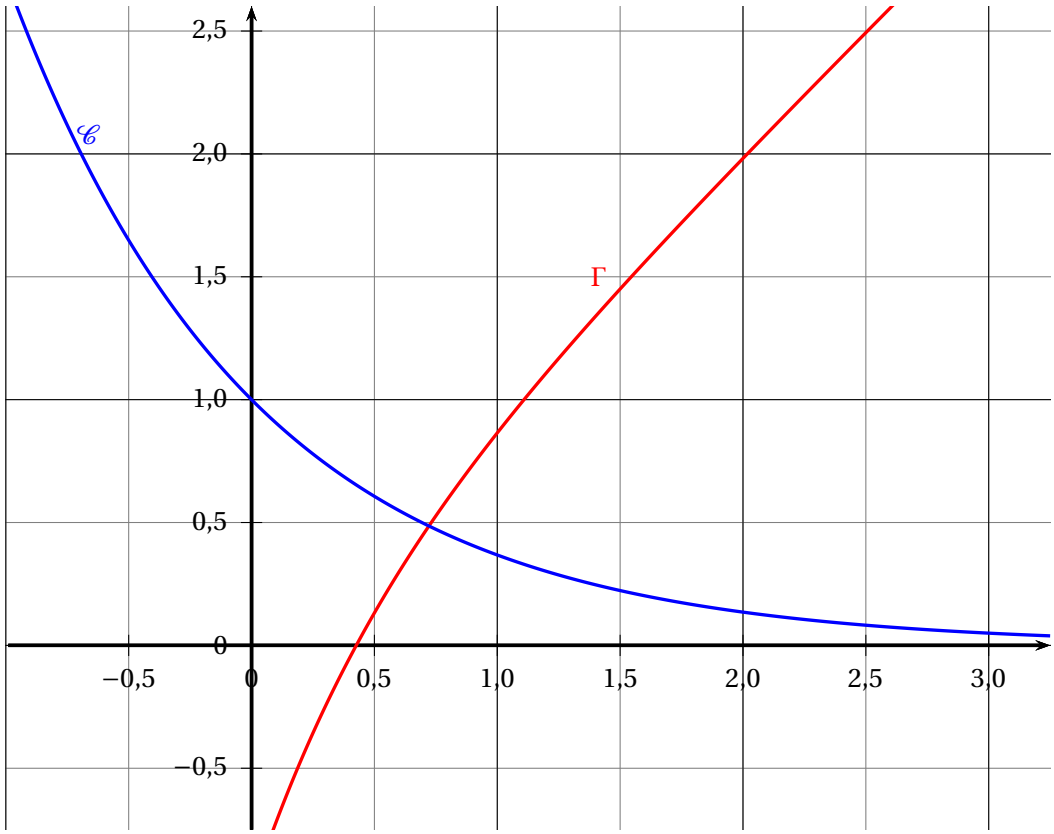
On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = [\ln(x)]^2 - \ln(x).$$

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction g en 0.
   b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
2. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Démontrer que, pour tout nombre réel x de $]0\,;\,+\infty[$, on a : $g'(x) = f(x)$, où f désigne la fonction définie dans la partie I.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   On fera figurer dans ce tableau les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$, ainsi que la valeur du minimum de g sur $]0\,;\,+\infty[$.
4. Démontrer que, pour tout nombre réel $m > -0{,}25$, l'équation $g(x) = m$ admet exactement deux solutions.
5. Déterminer par le calcul les deux solutions de l'équation $g(x) = 0$.

Annexe à compléter et à rendre avec la copie

Exercice 3



Sommaire Index

Index

arbre, 3, 8, 24, 36, 41, 48, 52
asymptote, 17, 44

concavité, 39
convexité, 5, 10, 11, 15, 18, 35, 43–45

démonstration par récurrence, 4, 7, 12, 22, 26, 30, 37, 42, 46, 55
dérivée, 11
dérivée seconde, 6, 11, 23, 35, 45
droites parallèles, 5

équation cartésienne de plan, 9, 13, 19, 27, 48, 53
équation de la tangente, 50, 54
équation différentielle, 10, 15, 16, 21, 27, 34, 39
équation paramétrique de droite, 5, 9, 13, 19, 27, 31, 38, 40, 48, 53
espérance, 3, 14, 20, 32, 36, 41
extremum, 10

fonction décroissante, 17
fonction exponentielle, 5, 17, 23, 27, 29, 31, 33, 39, 44, 45, 47, 54
fonction logarithme népérien, 6, 11, 21, 42, 49

géométrie dans l'espace, 8, 12, 18, 26, 31, 38, 40, 48, 53

intervalle de confiance, 25

lecture graphique, 10, 15, 33, 43, 45, 56
limite de fonction, 15, 17, 22, 31, 44, 49, 54, 56
limite de suite, 4, 12, 21, 29, 30, 42
loi binomiale, 14, 20, 25, 29, 36, 41, 52
loi de Bernoulli, 3, 8

minimum, 35

nombre de combinaisons, 13, 23

point d'inflexion, 6, 15, 18, 35, 46
probabilité, 24, 47, 48, 52
probabilité conditionnelle, 3, 8, 36, 41
programme Python, 4, 12, 18, 30, 37, 41, 46
projeté orthogonal, 5, 13, 18, 19, 38

sommaire, 1

suite, 4, 7, 12, 18, 20, 21, 25, 29, 30, 37, 41, 46, 55
suite arithmétique, 42
suite convergente, 4, 7, 12, 22, 26, 30, 37
suite croissante, 12
suite décroissante, 22
suite géométrique, 7, 12, 21, 26, 30, 37, 46, 55
suites, 46

tableau de variations, 4, 6, 10, 11, 15, 22, 23, 27, 31, 34, 39, 42, 44
tangente, 5, 27, 29

vecteur directeur, 40
vecteur normal, 9, 13, 19, 26, 48
vecteurs coplanaires, 5